Michael Winkler
Johannes Lankeit

10.6.2014

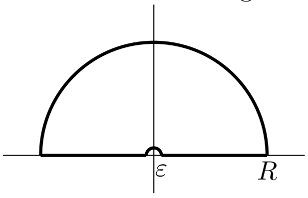
Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 9. Übung

Hausaufgabe 1: 8 Punkte

Berechne, mit ähnlichem Vorgehen wie in Blatt 8, Hausaufgabe 3, das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Verwende dabei Integration einer geeigneten Funktion entlang folgender Wege:



Tipp: $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$; $iRe^{it} = iR\cos(t) - R\sin(t)$.

Lösung:
Wir beobachten zunächst, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx + \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{-x}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

Aus Cauchyschem Integralsatz, Holomorphie von $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Sternförmigkeit von $\mathbb{C} \setminus i(-\infty, 0]$ folgt

$$0 = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_0^\pi \frac{e^{-i\varepsilon e^{-it}}}{-\varepsilon e^{-it}} i\varepsilon e^{-it}dt + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt.$$

Damit ist für jedes $R > \varepsilon > 0$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_0^\varepsilon \frac{\sin x}{x}dx + \frac{i}{2i}\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}dt - \frac{i}{2i}\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt.$$

Da $\frac{\sin x}{x}$ auf $[0, 1]$ beschränkt und für $\varepsilon \to 0$ zunächst $t \mapsto \varepsilon e^{it}$ gleichmäßig auf $[0, \pi]$ gegen 0 konvergiert und damit auch $e^{i\varepsilon e^{it}} \to e^0$ gleichmäßig auf $[0, \pi]$, ist

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1dt + \frac{i}{2i}\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt.$$

Wenn wir also zeigen können, dass für $R \to \infty$

$$\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt \to 0$$

gilt, können wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

folgern.

Dazu beobachten wir zunächst, dass

$$\begin{aligned}|\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt| \le \int_0^\pi |e^{iR\cos(t) - R\sin(t)}|dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt\right) \\ \le 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{1}{\sqrt{2}}}dt\right) \le 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin t}dt + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{1}{\sqrt{2}}}.\end{aligned}$$

Für $t \in (0, \frac{\pi}{4}]$ ist nun nach dem Mittelwertsatz mit einem $\tau \in (0, \frac{\pi}{4})$

$$\frac{\sin t}{t} = \cos(\tau) > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin t} dt < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\frac{t}{\sqrt{2}}} dt = \frac{\sqrt{2}}{R}(-e^{-R\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} + 1) \leq \frac{\sqrt{2}}{R}$$

und damit

$$|\int_0^{\pi} e^{iRe^{it}} dt| \leq \frac{2\sqrt{2}}{R} + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{1}{\sqrt{2}}} \to 0$$

für $R \to \infty$, sodass wir insgesamt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

erhalten.

Hausaufgabe 2: 4 Punkte

Welche Werte kann $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz$ für Wege γ von 0 nach 1 mit $\gamma^* \cap \{-i, i\} = \emptyset$ annehmen?

Lösung:

Es ist, indem wir den Weg γ noch um die einmal vorwärts und einmal rückwärts durchlaufene Strecke von 1 nach 0 verlängern (was wegen Präsenzaufgabe 2, Blatt 7, den Wert nicht ändern kann)

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{[1,0]\cdot\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{[0,1]} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{[1,0]\cdot\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz + \arctan(1) - \arctan(0) = \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{1+z^2} dz + \frac{\pi}{4},$$

wobei $\widetilde{\gamma}$ ein geschlossener Weg ist mit $\widetilde{\gamma}^* \cap \{-i, i\} = \emptyset$.

Wegen $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+iz} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-iz} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-(-i)}$ ist also

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2i} \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i} \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{z-(-i)} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2i} 2\pi i n(\widetilde{\gamma}, i) - \frac{1}{2i} 2\pi i n(\widetilde{\gamma}, -i) \\
&= \frac{\pi}{4} + \pi n(\widetilde{\gamma}, i) - \pi n(\widetilde{\gamma}, -i).
\end{aligned}$$

Da $n(\widetilde{\gamma}, i)$ und $n(\widetilde{\gamma}, -i)$ jeweils genau alle ganzen Zahlen annehmen können (ähnlich wie in Hausaufgabe 3, Blatt 7, lassen sich für beliebige paare ganzer Zahlen Wege passender Umlaufzahl konstruieren), ist also als Wert des Integrals gerade jedes Element von

$$\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$$

möglich.

Hausaufgabe 3: 12 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

$$a) \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt \qquad b) \int_{\partial B_{10}(1-2i)} \frac{39! z e^z}{(z+5)^{42}} dz \qquad c) \int_0^{4\pi} e^{e^{it} - 3it} dt$$

$$d) \int_{B_5(i)} \frac{e^{\cos(\zeta)}}{(\zeta - \frac{\pi}{2})^2} d\zeta \qquad e) \int_{\partial B_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \qquad f) \int_{\partial B_r(0)} \frac{\sin(z)}{(a-z)^2} dz,$$

worin $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $|a| \neq r$.

Hinweise: 1. Fasse a) als geeignetes Wegintegral auf. 2. Für einige der Integrale wirst du einen Satz aus der kommenden Vorlesung (Do, 12.6.) benötigen.

Lösung:

a) Mit $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ist

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}} ie^{it} dt = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = \frac{2\pi i}{i} e^0 = 2\pi.$$

b) $f(z) = 39! z e^z$ und damit $f^{(n)}(z) = 39!(z+n)e^z$. Nach der allgemeinen Cauchyschen Integralformel erhalten wir also

$$\int_{\partial B_{10}(1-2i)} \frac{39! z e^z}{(z+5)^{42}} dz = \frac{2\pi i}{41!} f^{(41)}(-5) = \frac{2\pi i}{40 \cdot 41} (-5+41) e^{-5} = \frac{9\pi i}{205} e^{-5}.$$

c)

$$\int_0^{4\pi} e^{e^{it} - 3it} dt = \int_0^{4\pi} \frac{e^{e^{it}}}{(e^{it})^3} \frac{ie^{it}}{ie^{it}} dt = \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{(e^{it})^4} ie^{it} dt = \frac{2}{i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z^4} dz = \frac{2}{i} \frac{2\pi i}{3!} (\frac{d^3}{dz^3} e^z)|_{z=0} = \frac{2\pi}{3}.$$

d) $\frac{\pi}{2} \in B_5(i)$. Allgemeine CIF mit $f(\zeta) = e^{\cos(\zeta)}$, $f'(z) = -\sin(z) e^{\cos(z)}$

$$\int_{B_5(i)} \frac{e^{\cos(\zeta)}}{(\zeta - \frac{\pi}{2})^2} d\zeta = \frac{2\pi i}{1!} f'(\frac{\pi}{2}) = -2\pi i \sin \frac{\pi}{2} e^{\cos \frac{\pi}{2}} = -2\pi i.$$

e) Allgemeine Cauchysche Integralformel, $f(z) = z^n$, $f^{(n-1)}(z) = \frac{n!}{z}$

$$\int_{\partial B_1(1)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(1) = \frac{2\pi i n!}{(n-1)!} = 2n\pi i.$$

f) Falls $|a| > r$, so ist der Integrand holomorph in $B_r(0)$, also das Integral gleich null. Ist hingegen $|a| < r$, wenden wir die CIF mit $f(z) = \sin(z)$ und $f'(z) = \cos(z)$ an (beachte, dass $(a-z)^2 = (z-a)^2$, sodass wir

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{\sin(z)}{(a-z)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(a) = 2\pi i \cos(a).$$

erhalten.

Hausaufgabe 4: 5 Punkte

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$. Ferner sei $r > 0$ so gewählt, dass z_0 die einzige Nullstelle von f in $\overline{B_r(z_0)}$ ist. Zeige:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

Lösung:

Betrachte die Funktion

$$g \colon z \mapsto \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{(z-z_0) f'(z_0)}.$$

Sie ist holomorph auf $B_{r+\delta}(z_0) \setminus \{z_0\}$ für ein $\delta > 0$, da z_0 die einzige Nullstelle von f in einer Umgebung von $B_r(z_0)$ ist.

Außerdem ist g auf $B_r(z_0)$ beschränkt:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{(z-z_0)f'(z_0)} = \frac{(z-z_0)f'(z_0) - f(z)}{f(z)(z-z_0)f'(z_0)} = \frac{f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) - f(z)}{(f(z) - f(z_0))(z-z_0)f'(z_0)} = \frac{\frac{f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)-f(z)}{(z-z_0)^2}}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} f'(z_0)};$$

der Zähler dieses Ausdrucks ist aber beschränkt nach Präsenzaufgabe 4, der Betrag des Nenners wegen der Nullstellenfreiheit von f in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ und $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} f'(z_0) = (f'(z_0))^2$ aus Stetigkeitsgründen nach unten beschränkt.

Gemäß Lemma 5.9 ist daher

$$\int_{\partial B_r(z_0)} g(z) dz = 0,$$

also

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{1}{f'(z_0)} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$