Michael Winkler
Johannes Lankeit

8.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 1. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Rufe dir die folgenden Definitionen wieder in Erinnerung:

- $\mathbb{C} = \{(x,y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ bildet mit den Operationen
$$+\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$$
und
$$\cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$
den **Körper der komplexen Zahlen**. Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $\{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ und definieren die **imaginäre Einheit** als $i := (0,1)$.
- Für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir **Realteil, Imaginärteil, komplex Konjugiertes** und **Betrag** als
$$\mathrm{Re}(z) = x, \ \ \mathrm{Im}(z) = y, \ \ \overline{z} = x - iy, \ \ |z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$
- Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnet
$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\}$$
die (offene) **Kreisscheibe** um z_0 mit Radius r.
- Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **offen**, falls zu jedem $z_0 \in A$ ein $r = r(z_0) > 0$ mit $B_r(z_0) \subset A$ existiert.
- $A \subset \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.
- $U \subset \mathbb{C}$ heißt **Umgebung** von $z_0 \in \mathbb{C}$, falls es $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset U$ gibt.
- Das **Innere** A° einer Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist die größte offene in A enthaltene Menge:
$$A^\circ = \bigcup \{\widetilde{A} \subset \mathbb{C};\ \widetilde{A} \subset A, \widetilde{A} \text{ offen}\}.$$
- Der **Abschluss** $\overline{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst:
$$\overline{A} = \bigcap \{\widetilde{A} \subset \mathbb{C};\ A \subset \widetilde{A}, \widetilde{A} \text{ abgeschlossen}\}.$$
- Der **Rand** ∂A von $A \subset \mathbb{C}$ ist definiert als $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.
- $z \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** von $A \subset \mathbb{C}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $(B_\varepsilon(z) \setminus \{z\}) \cap A \neq \emptyset$.
- $z \in \mathbb{C}$ heißt **isolierter Punkt** von A, falls es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \cap A = \{z\}$ gibt.
- Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ **konvergiert** gegen $z_0 \in \mathbb{C}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gibt.
- Für $A \subset \mathbb{C}$ heißt $U \subset A$ **offen in** A, falls es eine offene Menge $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ gibt mit $\widetilde{U} \cap A = U$.
- Für $A \subset \mathbb{C}$ heißt $U \subset A$ **abgeschlossen in** A, falls es eine abgeschlossene Menge $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ gibt mit $\widetilde{U} \cap A = U$.
- $A \subset \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U \subset A$ und $V \subset A$ offen in A und $U \cup V = A$ sowie $U \cap V = \emptyset$, so ist $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.
- Zu $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$ heißt $U \subset A$ **Umgebung von** z_0 **in** A, falls es $r > 0$ mit $B_r(z_0) \cap A \subset U$ gibt.
- Seien $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$ und $f\colon A \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt **stetig in** z_0, wenn für jede Umgebung U von $f(z_0)$ die Menge $f^{-1}(U) = \{z \in A;\ f(z) \in U\}$ eine Umgebung von z_0 in A ist. f heißt **stetig** (in A), wenn f stetig in jedem $z_0 \in A$ ist.

- Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann heißt
$$[z_1, z_2] := \{z_1 + t(z_2 - z_1);\ t \in [0,1]\}$$
die (kompakte) **Strecke** von z_1 nach z_2.
- Sind $n \in \mathbb{N}$ und $z_0, \dots z_n \in \mathbb{C}$, so heißt $\bigcup_{k=1}^{n} [z_{k-1}, z_k]$ ein **Polygonzug** (von z_0 nach z_n).
- Sei $A \subset \mathbb{C}$. Eine nichtleere Menge $C \subset A$ heißt **Zusammenhangskomponente** von A, falls C zusammenhängend ist und für jede zusammenhängende Menge $B \subset A$ mit $C \subset B$ bereits $B = C$ gilt.
- Eine nichtleere offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ heißt **Gebiet**.

Lösung:
Falls irgendetwas davon unbekannt sein sollte: Es steht ja alles im Aufgabentext.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige: Jede komplexe Zahl z lässt sich (in eindeutiger Weise) in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angeben.

Lösung:
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist also $z = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechne
$$a + ib = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) = z,$$
damit ist das also die gesuchte Darstellung.
Eindeutigkeit: Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$, also $x_1 - x_2 = i(y_2 - y1)$. Das ist (nach unserer Definition von $\mathbb{C}$) gleichbedeutend mit $(x_1 - x_2, 0) = (0, 1) \cdot (y_2 - y_1, 0) = (0, y_2 - y_1)$ und daher (Betrachtung der einzelnen Komponenten) mit $x_1 - x_2 = 0$ und $0 = y_2 - y_1$, also $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Präsenzaufgabe 3:
Beweise: $i^2 = -1$.
Berechne
$$\mathrm{Re}(\frac{i-3}{2+i}), \qquad \mathrm{Im}((i+2)^3), \qquad |2 + i - (5 - 3i)|, \qquad \overline{-2i + \frac{4+8i}{1+2i}}.$$
Zeige oder widerlege: $z \in \mathbb{C}$ erfüllt $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $|z| = \mathrm{Re}(z)$.

Lösung:
$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$
$$\frac{i-3}{2+i} = \frac{(i-3)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2i - i^2 - 6 + 3i}{4 - i^2} = \frac{-5+5i}{5} = -1 + i,$$
also $\mathrm{Re}(\frac{i-3}{2+i}) = -1$.
$$\mathrm{Im}((i+2)^3) = \mathrm{Im}(i^3 + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 2^2) = \mathrm{Im}(-i - 6 + 12i + 4) = 11.$$
$$|2 + i - (5 - 3i)| = |-3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\overline{-2i + \frac{4+8i}{1+2i}} = \overline{-2i + 4 \cdot \frac{1+2i}{1+2i}} = \overline{-2i + 4} = 4 + 2i.$$
Die Aussage ist für negative reelle Zahlen falsch. Ganz konkretes Gegenbeispiel: $z = -42$; $|z| = 42 \neq -42 = \mathrm{Re}(z)$. Richtig wird die Aussage übrigens, falls man links den Betrag entfernt oder rechts hinzufügt. (Zusatzaufgabe: Beweis!)

Präsenzaufgabe 4:
Skizziere die folgenden Mengen in der 'komplexen Ebene':
$$\{z \in \mathbb{C};\ |z - 2 + i| < |z - 3| \text{ und } |z - i| < 42\}, \qquad \{z \in \mathbb{C};\ z(2 + 3i) = 3 + 5i\}.$$

Lösung:
Wir haben $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ eingeführt; gesucht sind hier also Punktmengen in der Ebene. (x-Achse: Realteil, y-Achse: Imaginärteil)
Die gesuchten Zahlen liegen näher an $2-i$, also $(2,-1)$, als an 3, d.h. $(3,0)$. Die Linie, die diesen Bereich begrenzt, ist eine Gerade; genauer: die Mittelsenkrechte durch die Verbindungslinie der beiden genannten Punkte.
Darüberhinaus müssen sie innerhalb des Kreises mit Radius 42 um i, also um $(0,1)$ liegen. (Die Informationen sollten zum Zeichnen reichen.)
Im Fall der zweiten Menge lässt sich die Gleichung auflösen (vergleiche vorhergehende Aufgabe) und man erhält eine einpunktige Menge.

Präsenzaufgabe 5:
Für $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $z_n \to z$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$ für $n \to \infty$ (in $\mathbb{R}$).

Lösung:
$z_n \to z$ (in $\mathbb{C}$) ist (wie ein Vergleich der Definitionen zeigt) dasselbe wie $|z_n - z| \to 0$ (als Konvergenz einer reellen Zahlenfolge).
Sei nun zunächst $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$. Dann ist

$$0 \le |z_n - z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_n - z))^2 + (\mathrm{Im}(z_n - z))^2} \le |\mathrm{Re}(z_n - z)| + |\mathrm{Im}(z_n - z)| = |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(z)| \to 0.$$

Sei umgekehrt $z_n \to z$, also $|z_n - z| \to 0$. Dann

$$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(z_n - z)| \le |z_n - z| \to 0.$$

$\mathrm{Im}(z_n - z)$ analog.

Präsenzaufgabe 6:
Es sei $A \subset \mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in A$. Zeige:
f ist stetig in z_0 genau dann, wenn für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \to z_0$ gilt, dass $f(z_n) \to f(z_0)$.
f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ die Menge $f^{-1}(U)$ offen in A ist.

Lösung:
Sei f stetig in z_0 und $z_n \to z_0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon(f(z_0))$ Umgebung von $f(z_0)$ und demnach $f^{-1}(B_\varepsilon(f(z_0)))$ Umgebung von z_0, enthält also $B_{R_\varepsilon}(z_0)$ (mit passendem $R_\varepsilon > 0$). Sei nun n_0 so gewählt, dass für $n > n_0$ $z_n \in B_{R_\varepsilon}(z_0)$. Dann ist für $n > n_0$ auch $z_n \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(z_0)))$, also $f(z_n) \in B_\varepsilon(f(z_0))$ und damit $|f(z_0) - f(z_n)| < \varepsilon$.
Insgesamt gilt also $f(z_n) \to f(z_0)$.

Sei f unstetig in z_0 und $z_n \to z_0$.
Es gibt demnach eine Umgebung U von $f(z_0)$, deren Urbild zwar z_0 enthält, aber keine komplette Kugel um z_0. Es sei $\varepsilon_0 > 0$ derart gewählt, dass $B_{\varepsilon_0}(f(z_0)) \subset U$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap A \cap (\mathbb{C} \setminus f^{-1}(U))$. Dann gilt $z_n \to z_0$ (da $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$), aber $|f(z_n) - f(z_0)| > \varepsilon_0$, da $z_n \in \mathbb{C} \setminus f^{-1}(U)$.

Sei f stetig. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.
Sei $x \in f^{-1}(U)$ beliebig. Da $x \in f^{-1}(U)$, ist $f(x) \in U$ und damit U eine Umgebung von $f(x)$ in A. Eine Menge, die [in A] Umgebung all ihrer Elemente ist, ist offen [in A].

Sei $z_0 \in A$. Sei U Umgebung von $f(z_0)$. Dann enthält U für ein $\varepsilon > 0$ die Menge $B_\varepsilon(f(z_0))$ und nach Voraussetzung ist $f^{-1}(B_\varepsilon(f(z_0)))$ offen in A, es gibt also $\delta > 0$, sodass $B_\delta(z_0) \cap A \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(z_0))) \subset f^{-1}(U)$; damit ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von z_0, also ist f stetig in z_0.

Präsenzaufgabe 7:
Es seien $A \subset \mathbb{C}$ sowie $z \in \mathbb{C}$. Beweise oder widerlege:

a) Falls z ein Häufungspunkt von A ist, so ist $z \in \partial A$.

b) Falls z Häufungspunkt von A ist, gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{z\}$, die gegen z konvergiert.

c) Wenn A eine Umgebung von z enthält, so ist A offen.

d) Falls ∂A kompakt ist, ist A beschränkt.

e) Falls A beschränkt ist, ist ∂A kompakt.

Lösung:

a) Nö. $A = B_1(0)$, $z = 0$.

b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es in $B_{\frac{1}{n}}(z)$ ein Element a_n von A. (Nach Definition eines Häufungspunkts von A ist nämlich der Schnitt dieser Umgebung mit A nicht leer.) Die Folge der a_n konvergiert gegen z, da $|z - a_n| < \frac{1}{n} \to 0$.

c) $z = 0$. $A = B_1(0) \cup \{42 + 42i\}$ ist nicht offen, enthält aber eine Umgebung von z.

d) $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\partial A = \{0\}$ kompakt, aber A unbeschränkt.

e) ∂A ist abgeschlossen als Schnitt von $\overline{A}$ mit dem Komplement der offenen Menge A°. Falls A beschränkt ist, ist auch ∂A beschränkt. (Wenn A beschränkt ist, ist $A \subset B_R(0)$ für ein $R > 0$. Offensichtlich[1] ist $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R\}$ eine abgeschlossene Menge, die A enthält. Damit enthält sie auch $\overline{A}$, also erst recht ∂A und ∂A ist beschränkt (alle Elemente haben einen Betrag kleiner oder gleich R.))

Präsenzaufgabe 8:
Sei $A \subset \mathbb{C}$.

a) Zeige: Ist A offen, so gilt $A^\circ = A$. Ist A abgeschlossen, so ist $\overline{A} = A$.

b) Gibt es Mengen mit $A^\circ = \overline{A}$?

c) Zeige:
$$\overline{A} = A \cup \{z \in \mathbb{C};\ z \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

d) Zeige:
$$\partial A = \{z \in \mathbb{C};\ \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gilt sowohl } B_\varepsilon(z) \cap A \neq \emptyset \text{ als auch } B_\varepsilon(z) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

Lösung:

a) Nach Definition ist $A^\circ \subset A$; außerdem ist wegen der Offenheit von A auch
$$A^\circ = \bigcup_{\widetilde{A} \subset A, \widetilde{A} \text{ offen}} \widetilde{A} \supset A,$$
da $\widetilde{A} = A$ in der Vereinigung vorkommt.
Ähnlich für den Abschluss: $A \subset \overline{A}$ klar, $\overline{A} \subset \bigcap \ldots \subset A$.

b) Ja. $\emptyset$ und $\mathbb{C}$.

c) $A \subset \overline{A}$ ergibt sich direkt aus der Definition.
Sei z ein Häufungspunkt von A mit $z \notin A$. Dann ist für $\varepsilon > 0$ nach der Definition eines Häufungspunktes $A \cap B_\varepsilon(z)$ nicht leer. Angenommen, $z \notin \overline{A}$. Dann gäbe es eine offene Menge $U \subset \mathbb{C} \setminus A$, sodass $z \in U$ und insbesondere gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \cap A = \emptyset$, im Widerspruch zum eben Gesehenen.
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus A$ auch kein Häufungspunkt von A. Wir zeigen: Dann liegt z auch nicht in $\overline{A}$.
Denn: Es gibt nach dem soeben Vorausgesetzten eine Umgebung $B_\varepsilon(z)$ von z, die A nicht schneidet. Damit ist $\overline{A} \cap (\mathbb{C} \setminus B_\varepsilon(z))$ eine abgeschlossene Menge, die A umfasst, also $\overline{A} \subset \overline{A} \cap (\mathbb{C} \setminus B_\varepsilon(z))$ und insbesondere $z \notin A$.

[1] Falls nicht: Unbedingt nachfragen.

d) Sei $z \in \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Sei $\varepsilon > 0$. Wäre nun $B_\varepsilon(z) \cap A = \emptyset$, so wäre $\overline{A} \cap (\mathbb{C} \setminus B_\varepsilon(z))$ eine abgeschlossene Menge, die A umfasst, und daher $\overline{A} \subset \overline{A} \cap (\mathbb{C} \setminus B_\varepsilon(z))$, also $z \notin \overline{A}$.
Wäre für ein $\varepsilon > 0$ die Schnittmenge $B_\varepsilon(z) \cap (\mathbb{C} \setminus A)$ leer, so wäre $z \in B_\varepsilon(z) \subset A$, d.h. z wäre in einer offenen Menge enthalten, die in A enthalten ist, also $z \in A^\circ$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ so, dass für jedes $\varepsilon > 0$ sowohl $B_\varepsilon(z) \cap A \neq \emptyset$ als auch $B_\varepsilon(z) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$ gelten. Dann ist $z \notin A^\circ$, da dazu für ein $\varepsilon > 0$ auch $B_\varepsilon(z) \subset A$ gelten müsste. Aber $z \in \overline{A}$, da z in keiner offenen Menge enthalten ist, die A nicht schneidet. Damit gilt dann $z \in \partial A$.

Präsenzaufgabe 9:

Beweise oder widerlege:
Ist $A \subset \mathbb{C}$ offen und $U \subset A$ offen in A, so ist U offen.
Ist $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und $U \subset A$ abgeschlossen in A, so ist U abgeschlossen.
$A \subset \mathbb{C}$ ist zusammenhängend genau dann, wenn A und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von A sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen in A sind.

Lösung:

Da $U \subset A$ offen in A, gibt es eine offene Menge $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$, sodass $U = A \cap \widetilde{U}$. Da A offen und der Schnitt zweier offener Mengen offen ist (sei x Element des Schnitts; dann enthält jede der beiden Mengen eine Kugel um x, deren kleinere natürlich noch immer im Schnitt liegt (Achtung: bei unendlich vielen Mengen schlägt dieses Argument fehl)), ist also U offen.
Da $U \subset A$ abgeschlossen in A, gibt es $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen mit $U = A \cap \widetilde{U}$. Nun ist der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen (siehe auch nächste Aufgabe), also ist auch U abgeschlossen.
$\mathbb{C}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen, also sind $\mathbb{C} \cap A = A$ und $\emptyset \cap A = \emptyset$ offen und abgeschlossen in A.
Sei A zusammenhängend. Sei U offen und abgeschlossen in A. Dann ist auch $A \setminus U$ abgeschlossen und offen in A. Die beiden Mengen sind disjunkt und ihre Vereinigung ergibt A; nach Definition von "zusammenhängend" muss also $U = \emptyset$ oder $A \setminus U = \emptyset$ sein – also $U = \emptyset$ oder $U = A$. Es gibt also keine weiteren Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen in A sind.
Es gebe nun außer A und $\emptyset$ keine Teilmenge von A, die offen und abgeschlossen zugleich ist. Sei $A = U \cup V$ mit U, V offen in A und $U \cap V = \emptyset$. Da $V = A \setminus U$ offen ist, ist U auch abgeschlossen, also offen und abgeschlossen zugleich. Damit muss $U = \emptyset$ oder $U = A$, also $V = \emptyset$ gelten. Demnach ist A zusammenhängend.

Präsenzaufgabe 10:

Seien I eine Menge und $A_\alpha \subset \mathbb{C}$ für $\alpha \in I$. Beweise:
Ist A_α offen für alle $\alpha \in I$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ offen.
Ist A_α abgeschlossen für alle $\alpha \in I$, so ist $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ abgeschlossen.
Sei $A_\alpha \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend für alle $\alpha \in I$. Gilt dann $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ zusammenhängend.

Lösung:

Sei $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Dann gibt es $\alpha_0 \in I$ mit $x \in A_{\alpha_0}$. Da A_{α_0} offen ist, gibt es $r > 0$, sodass $B_r(x) \subset A_{\alpha_0}$. Damit ist auch $B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, also enthält die Menge $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ um jeden ihrer Punkte noch einen Ball, ist mithin offen.

Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Da also $\mathbb{C} \setminus A_\alpha$, nach der DeMorgan'schen Regel

$$\mathbb{C} \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (\mathbb{C} \setminus A_\alpha)$$

gilt und diese Menge (wie gerade gezeigt) offen ist, ist also der Schnitt der A_α wieder abgeschlossen.

Es sei $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = U \cup V$, wobei $U \cap V = \emptyset$ und U sowie V offen in $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ seien.
Da $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, gibt es $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ und oBdA ist $x \in U$. Nehmen wir nun an, dass $V \neq \emptyset$, so muss es $y \in V$ geben und damit auch ein $\alpha_0 \in I$, sodass $y \in A_{\alpha_0}$. (Schließlich ist V eine Teilmenge von $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.) Nun ist $U \cap A_{\alpha_0}$ eine nichtleere (enthält x) und in A_{α_0} offene Menge, $V \cap A_{\alpha_0}$ ebenso (enthält y). Es ist $(V \cap A_{\alpha_0}) \cap (U \cap A_{\alpha_0}) = \emptyset$ sowie $(V \cap A_{\alpha_0}) \cup (U \cap A_{\alpha_0}) = A_{\alpha_0}$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass A_{α_0} zusammenhängend ist. Also muss $V = \emptyset$ sein – und damit die Vereinigung zusammenhängend.

Präsenzaufgabe 11:
Sind $A \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und $B \subset \mathbb{C}$ derart, dass $A \subset B \subset \overline{A}$ gilt, so ist auch B zusammenhängend.

Lösung:
Sei $B = U \cup V$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U = B \cap \widetilde{U}$, $V = B \cap \widetilde{V}$ für offene Mengen $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \mathbb{C}$. Dann ist oBdA $\widetilde{U} \cap A$ leer (da A zusammenhängend ist). Ist nun $\widetilde{U} \cap \overline{A} \neq \emptyset$, so gibt es $y \in \widetilde{U}$ mit $y \in \overline{A} \setminus A$, also y Häufungspunkt von A. Weil $\widetilde{U}$ offen ist, ist dann auch für ein $\varepsilon > 0$ der Ball $B_\varepsilon(y)$ in $\widetilde{U}$ enthalten. Aber weil y ein Häufungspunkt von A ist, enthält $B_\varepsilon(y)$ auch ein Element von A, im Widerspruch zu $A \cap \widetilde{U} = \emptyset$.
Damit muss $\widetilde{U} \cap A$ leer sein, also auch $\emptyset = \widetilde{U} \cap B = U$, d.h. B ist zusammenhängend.

Präsenzaufgabe 12:
Sind einelementige Mengen zusammenhängend?

Lösung:
Ja. Wenn $U \subset \{x\}$, $V \subset \{x\}$ und $U \cap V = \emptyset$, muss schon eine der beiden Mengen leer sein.
(Erst recht gilt das also für die Mengen U, V, die zusätzlich noch die anderen Bedingungen aus der Definition erfüllen.)

Präsenzaufgabe 13:
Sei $A \subset \mathbb{C}$.
Wenn $\emptyset \neq B \subset A$ zusammenhängend ist, gibt es genau eine Zusammenhangskomponente C von A, die B enthält.
Ist $z \in A$, so gibt es eine Zusammenhangskomponente C von A mit $z \in \mathbb{C}$.
Sind C_1, C_2 Zusammenhangskomponenten von A, so gilt entweder $C_1 = C_2$ oder $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Lösung:
Betrachte als C die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, die B umfassen. Sie ist nicht leer, da sie B enthält, und nach PA 10 zusammenhängend. Ist nun D eine zusammenhängende Menge mit $C \subset D$, so ist erst recht $B \subset D$, also D in der Vereinigung enthalten, als die wir C definiert haben. Damit ist $C = D$. Folglich ist C eine Zusammenhangskomponente.
Ist B in zwei Zusammenhangskomponenten C_1, C_2 enthalten, so ist $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ und damit (PA 10) auch $C_1 \cup C_2$ zusammenhängend. Da $C_1 \subset C_1 \cup C_2$ eine Zusammenhangskomponente ist, folgt $C_1 = C_1 \cup C_2$ und analog erhält man $C_2 = C_1 \cup C_2$, also $C_1 = C_2$ und die Zusammenhangskomponente, die B enthält, ist demnach eindeutig bestimmt.
Da die Menge $\{z\}$ zusammenhängend ist (s.o.), folgt die nächste Behauptung aus dem ersten Teil.
Auch diese Aussage haben wir soeben bewiesen: Ist $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, wähle $z \in C_1 \cap C_2$ und beachte, dass die Zusammenhangskomponente, die $\{z\}$ umfasst, eindeutig bestimmt ist.

Präsenzaufgabe 14:
Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen. Dann sind äquivalent:

a) A ist zusammenhängend.

b) Für alle $a, b \in A$ gibt es einen Polygonzug P von a nach b mit $P \subset A$.

c) Für alle $a, b \in A$ gibt es einen Polygonzug P aus achsenparallelen Strecken von a nach b mit $P \subset A$.

Lösung:
Trivialerweise impliziert c) bereits b).
Dass a) aus b) folgt, ist eine Konsequenz der vorhergehenden Aufgabe – wie beim Lösen von Hausaufgabe 5 klar werden wird.
Für die (wichtige) Folgerung a)$\Rightarrow$ c) betrachten wir zu $z \in A$ die Menge P_z aller Punkte, die sich mit z durch einen achsenparallelen Polygonzug verbinden lassen. Diese Menge ist offen. Denn um jeden Punkt y gibt es eine Kugel, die noch in A enthalten ist, und vom Kugelmittelpunkt lässt sich ein achsenparalleler Polygonzug zu jedem Punkt x der Kugel angeben. Die Polygonzüge von z nach y und von y nach x "hintereinandergehängt" ergeben dann einen achsenparallelen Polygonzug von z nach x.
Auch $A \setminus P_z$ ist dank einer sehr ähnlichen Argumentation offen. Da ferner P_z nicht leer ist, muss $P_z = A$ gelten (PA

9).
Die Skizzenhaftigkeit dieses Beweises ist (gerade, da es um eine wichtige Aussage geht) als die dringende Aufforderung zu verstehen, ihn selbst nochmal gründlich durchzuarbeiten und auszuformulieren. Nachfragen dürfen gerne gestellt werden.

Präsenzaufgabe 15:
Zeige: Ist A abgeschlossen, so ist jede Zusammenhangskomponente von A abgeschlossen. Ist A offen, so ist jede Zusammenhangskomponente von A offen.

Lösung:
Sei C eine Zusammenhangskomponente von A und sei z ein Häufungspunkt von C. (Zu zeigen ist dann, dass $z \in C$.) Da $C \subset C \cup \{z\} \subset \overline{C}$ und C zusammenhängend, ist auch (siehe oben) $C \cup \{z\}$ zusammenhängend, also z in derselben Zusammenhangskomponente wie C, d.h. $z \in C$.

Sei C eine Zusammenhangskomponente von A und $z \in C$. Dann ist, da A offen ist, auch $B_\delta(z) \subset A$ für ein $\delta > 0$. Da die Menge $B_\delta(z)$ zusammenhängend ist, ist sie in genau einer Zusammenhangskomponente enthalten (siehe letzte Aufgabe), also $B_\delta(z) \subset C$. Damit umfasst C zu jedem Element noch eine ganze Kugel um dieses Element, ist also offen.

Präsenzaufgabe 16:
Zeige: Ist $A \subset \mathbb{C}$ offen, so hat A höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.

Lösung:
Nach der vorherigen Aufgabe ist jede einzelne Zusammenhangskomponente von A offen, enthält also eine Kugel $B_\varepsilon(z)$ (für ein $\varepsilon > 0$ und ein $z \in \mathbb{C}$), und damit mindestens ein Element von $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Davon gibt es aber nur abzählbar viele, und keines liegt (siehe Präsenzaufgabe 14) in mehr als einer Zusammenhangskomponente. Also kann es höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten von A geben.

Präsenzaufgabe 17:
Finde ein Beispiel für eine Menge mit überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten.

Lösung:
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Je zwei Elemente dieser Menge liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten. Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und A eine Menge, die x und y enthält. Dann ist A nicht zusammenhängend (also insbesondere keine Zusammenhangskomponente). Beweis: q sei eine rationale Zahl mit $x < q < y$ (oder $y < q < x$). Dann ist

$$A = (A \cap \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) < q\}) \cup (A \cap \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > q\}),$$

die beiden angegebenen Mengen haben leeren Schnitt und sind offen in A. Außerdem sind sie nicht leer, da sie x bzw. y enthalten.