Michael Winkler
Johannes Lankeit

17.6.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 10. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und es gebe $M \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Re} f(z) \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige: f ist konstant.
Gilt auch für beliebig oft differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass aus der Existenz von $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \le M \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt, dass f konstant ist?

Lösung:

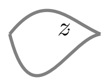
Betrachte $\frac{1}{M+1-f}$. Diese Funktion ist wegen

$$|M+1-f(z)|^2 = |M+1-\mathrm{Re}(f(z))|^2 + |\mathrm{Im}(f(z))|^2 \ge 1$$

sicherlich durch 1 nach oben beschränkt und wegen der Nullstellenfreiheit ihres Nenners und der Holomorphie von f holomorph. Nach dem Satz von Liouville ist sie also beschränkt.
Dass Entsprechendes für noch so oft differenzierbare reelle Funktionen nicht gilt, zeigt beispielsweise der Sinus.

Präsenzaufgabe 2:

Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nehme in jedem Punkt der im Folgenden als graue Linie eingezeichneten Menge den Wert 42 an. Auch z sei so, wie aus der Zeichnung hervorgeht. Bestimme $f(z)$. Verwende dieses Mal Satz 6.3 anstelle des Arguments von letzter Woche.



Lösung:

$f-42$ ist eine holomorphe Funktion, deren Nullstellenmenge die graue Linie enthält, sich also irgendwo (in jedem Punkt dieser Linie) häuft. Damit ist $f-42=0$, also f überall (und insbesondere in z) gleich 42.

Präsenzaufgabe 3:

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und von der Nullfunktion verschieden und $K \subset \mathbb{C}$ sei kompakt. Zeige: f hat nur endlich viele Nullstellen in K. Folgere, dass f höchstens abzählbar viele Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat.

Lösung:

Gäbe es unendlich viele Nullstellen von f in K, müssten ihre Menge einen Häufungspunkt in K haben (Bolzano-Weierstrass). Damit wäre aber (Satz 6.3) $f \equiv 0$. Der zweite Teil der Behauptung folgt daraus, dass $\mathbb{C}$ die abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. (z.B. $\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z \in \mathbb{C}; |z| \le n\}$)

Präsenzaufgabe 4:

Gegeben sei die ganze Funktion f mit der Eigenschaft $|f(z)| \le |\frac{1}{z}|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Bestimme $f(42)$ sowie $f(42i)$.

Lösung:

Nach Voraussetzung ist f holomorph und außerdem beschränkt. (Auf $B_1(0)$ wegen Stetigkeit, auf dem Komplement wegen $|f(z)| \le |\frac{1}{z}| \le 1$.) Der Satz von Liouville liefert sofort $f \equiv 0$ und die Funktionswerte an beliebigen Stellen sind damit 0.

Präsenzaufgabe 5:

Finde alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

a) $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Gibt es eine von der Nullfunktion verschiedene

c) holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

d) beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Lösung:

a) Nur die Nullfunktion.

b) Nur $f(z) = 2z$.

Grund: Die Differenz aus f und der angegebenen Funktion ist holomorph und hat Nullstellen in $\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist diese Differenz gemäß Satz 6.3 auf ganz $\mathbb{C}$ identisch 0.

c) Hier liegt der Häufungspunkt der Nullstellen nicht mehr in dem Gebiet – und schon funktioniert es: $\sin(\frac{\pi}{z})$.

d) $f(x) = 0$ für $x > 0$ und $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x < 0$.