Michael Winkler
Johannes Lankeit

4.7.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 13. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Entwickele jeweils f in eine Laurentreihe in $A_{r,R}(z_0)$.

(a) $f(z) := \frac{e^z}{(z-3)^3}$, $\quad z_0 := 3$, $r := 0$, $R := \infty$;

(b) $f(z) := \frac{4}{(z+1)(z-1)^2}$, $\quad z_0 := 0$, $r := 0$, $R := 1$ sowie $r := 1$, $R := \infty$.

Lösung:

(a) Für $z \in A_{0,\infty}(3) = \mathbb{C} \setminus \{3\}$ gilt mit der Definition der e-Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-3)^3} = \frac{e^{z-3+3}}{(z-3)^3} = \frac{e^3}{(z-3)^3} \cdot e^{z-3} = \frac{e^3}{(z-3)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^3}{k!} \cdot (z-3)^{k-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{e^3}{(n+3)!} \cdot (z-3)^n. \end{aligned}$$

(b) Mit Partialbruchzerlegung gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2} \tag{1}$$

mit

$$a = \frac{4}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1} = \frac{4}{(-2)^2} = 1 \quad \text{und} \quad c = \frac{4}{z+1}\Big|_{z=1} = \frac{4}{2} = 2.$$

a erhält man, indem man (1) mit $(z+1)$ multipliziert und dann $z=-1$ einsetzt, und c durch Multiplikation von (1) mit $(z-1)^2$ und Einsetzen von $z=1$. Setzt man nun $z=0$ in (1) ein, so erhält man

$$\frac{4}{1 \cdot (-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{b}{-1} + \frac{2}{(-1)^2},$$

also $b = 1 + 2 - 4 = -1$. Somit folgt

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}.$$

Weiter ist die Funktion $g : B_1(0) \to \mathbb{C}$, $g(\xi) := \frac{1}{1-\xi}$ für $\xi \in B_1(0)$ holomorph mit $g(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi^k$ für $\xi \in B_1(0)$. Mit Satz 3.9 gilt

$$\frac{1}{(1-\xi)^2} = g'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1}, \quad \xi \in B_1(0).$$

Somit gilt für $z \in A_{0,1}(0)$ wegen $|z| < 1$ und $|-z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = \frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{1-z} + 2 \cdot \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \big((-1)^k + 2k + 3\big) \cdot z^k. \end{aligned}$$

Für $z \in A_{1,\infty}(0)$ gilt wegen $|\frac{1}{z}| < 1$ und $|-\frac{1}{z}| < 1$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{2}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{z}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{-k} - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \frac{2}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{-k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2k \cdot z^{-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \big((-1)^k - 1 + 2k\big)\, z^{-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \big((-1)^{-n-1} - 1 + 2(-n-1)\big)\, z^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \big((-1)^{-n-1} - 2n - 3\big)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{-2} \big((-1)^{-n-1} - 2n - 3\big)\, z^n,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $(-1)^{1-1} - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$ gilt.

Präsenzaufgabe 2:
Bestimme das Residuum von

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-3)^3}$$

in $z_0 = 3$.

Lösung:
Wir kennen aus Aufgabe 1 bereits die Laurentreihe und können einfach den Koeffizienten a_{-1} ablesen: Es ist $\frac{e^3}{(n+3)!}$ für $n = -1$, also $\frac{e^3}{2}$.

Präsenzaufgabe 3:
Berechne mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Lösung:
(Tatsächlich kennen wir das Ergebnis, weil wir in diesem Fall wissen, dass arctan eine Stammfunktion ist. „Lassen wir uns also überraschen", ob wir auch auf diesem Wege π erhalten. Bei beispielsweise $\frac{1}{1+x^4}$ oder den Integralen wie in Hausaufgabe 6 kommen wir mit dem Wissen aus Analysis II wahrscheinlich nicht weiter.)

Zunächst bestimmen wir die Polstellen der Funktion.

Da der Nenner mit

$$(x-i)(x+i)$$

übereinstimmt, liegen diese sicherlich in i und $-i$.

Was sind die zugehörigen Residuen?

Um das festzustellen, legt uns die Definition nahe, Laurentreihen mit Entwicklungspunkten i bzw. $-i$ aufzustellen, und jeweils a_{-1} abzulesen.
Möglicherweise hilft dabei wieder die Partialbruchdarstellung

$$\frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{\frac{1}{2i}}{x-i} + \frac{-\frac{1}{2i}}{x+i}.$$

(Wie üblich erhält man sie, indem man $\frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i}$ ansetzt und A bzw. B bestimmt.)

Betrachten wir die Stelle i: Wenn wir eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-i)^n$ um diesen Punkt aufstellen, liefert $-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$ als (in einer Umgebung dieses Punktes) holomorphe Funktion nur Beiträge zum Nebenteil (also dem Teil mit nichtnegativem Exponenten; nämlich die aus der entsprechenden Taylorentwicklung). Ignorieren wir diesen Teil also einfach, uns interessiert ja nur der Koeffizient a_{-1}.

Aber das Residuum (oder: die gesamte Laurentreihe) von

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}$$

in i lässt sich leicht ablesen (das ist ja bereits die Form einer Laurentreihe):

$$a_{-1} = \frac{1}{2i}$$

(und $a_{-n} = 0$ für $n \neq 1$).
Daher erhalten wir also $res(z \mapsto \frac{1}{1+z^2}, i) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$.
In $-i$ können wir ganz ähnlich ebenfalls das Residuum berechnen: Es ist $-\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$.
In allen anderen Punkten ist die Funktion holomorph, das Residuum also 0.

Es gibt alternative Möglichkeiten zur Residuenbestimmung. Eine der Hausaufgaben liefert beispielsweise ein nützliches Kriterium (siehe dort).

Um den Residuensatz anwenden zu können, brauchen wir nun einen geschlossenen Integrationsweg. Idealerweise enthält er den Weg, über den wir letztlich integrieren wollen, also den „Weg von $-\infty$ nach ∞“.
Nun ist das leider kein Weg mehr.
Wie wir das in Aufgaben zur Cauchy-Integralformel schon verwendet haben, behelfen wir uns also damit, den Weg von $-R$ bis R entlang der reellen Achse zu verwenden, dann einen Bogen zurück zu schlagen und schließlich den Grenzfall $R \to \infty$ zu untersuchen. Als „Bogen zurück“ verwenden wir hier den Halbkreis mit Radius R durch die obere Halbebene, insgesamt also den Weg γ, der sich aus

$$\gamma_1(t) = t, \qquad t \in [-R, R]$$

und

$$\gamma_2(t) = Re^{it}, \qquad t \in [0, \pi]$$

zusammensetzt. (Wer einen fortlaufend parametrisierten Weg in einheitlicherer Darstellung wünscht, reparametrisiere und konsultiere Übung 7, Hausaufgabe 2.)
(In manchen anderen Fällen sind Wege von rechteckiger Form günstiger.)
Damit bekommen wir also schließlich

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2e^{2it}} iRe^{it} dt.$$

Der erste Term sieht vielversprechend aus, der zweite stört noch. Wir hoffen also, dass er für $R \to \infty$ verschwindet. Dazu suchen wir ihn folgendermaßen abzuschätzen (Anwendung der Standardabschätzung ist dasselbe):

$$\left| \frac{1}{1+R^2e^{2it}} iRe^{it} \right| = \left| \frac{R}{1+R^2e^{2it}} \right| = \frac{R}{1+R^2}$$

wegen $|1+R^2e^{2it}| \geq |R^2e^{2it}| - 1 = R^2 - 1$ (zumindest falls $R > 1$) und daher

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2e^{2it}} iRe^{it} dt \right| \leq \pi \frac{R}{1+R^2} \to 0$$

für $R \to \infty$. (Glück gehabt.)
Da wir bereits (vgl. Analysis II) wissen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ existiert (was wir selbst dann nachweisen könnten, wenn wir den Wert noch nicht kennten), wissen wir also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2e^{2it}} iRe^{it} dt \right).$$

Es wird Zeit, dass wir uns um den zugehörigen Wert kümmern: Der Einsatz des Residuensatzes. Wenn $R > 1$ ist, ist $n(\gamma, i) = 1$ und $n(\gamma, -i) = 0$ (Es sei an Übung 8, Präsenzaufgabe 3, erinnert.)

Damit ist also

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \cdot 1 \cdot res(\gamma, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

und wir erhalten schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 dt + \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2 e^{2it}} iRe^{it} dt \right) = \lim_{R\to\infty} \pi = \pi,$$

also genau das erwartete Ergebnis.

Hätten wir auch den Weg im Halbkreis durch die untere Halbebene wählen können? Was hätte sich geändert?