Michael Winkler
Johannes Lankeit

15.7.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 14. Übung

Präsenzaufgabe 1:

(a) Es sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion in den Variablen x und y, die für alle $x,y \in \mathbb{R}$ mit $x^2+y^2=1$ wohldefiniert ist. Zeige, dass es eine endliche Menge $A \subset B_1(0)$ und ein $r>1$ gibt, so dass $\tilde{R} : B_r(0)\setminus A \to \mathbb{C}$, $\tilde{R}(z) := \frac{1}{z}\cdot R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$ für $z \in B_r(0)\setminus A$, eine holomorphe Funktion ist. Beweise dann, dass gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t),\sin(t))\,dt = 2\pi \sum_{z\in A} res(\tilde{R};z). \tag{1}$$

Tipp: Betrachte das Integral $\int_{\partial B_1(0)} \tilde{R}(z)\,dz$ und stelle es mit Hilfe einer Parametrisierung von $\partial B_1(0)$ durch das Integral in (1) dar.

(b) Berechne die Integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}+\cos(t)+\sin(t)}\,dt$ und $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\,dt$.

Lösung:

(a) Da $R(x,y)$ eine rationale Funktion in x und y ist, ist $\tilde{R}$ eine rationale Funktion in z. Somit hat $\tilde{R}$ in der kompakten Menge $\overline{B_2(0)}$ endlich viele Singularitäten. Es sei A die Menge der Singulariäten von $\tilde{R}$ in $B_1(0)$. A ist somit eine endliche Menge. Weiter gilt für $z\in\partial B_1(0)$ wegen $z=e^{i\varphi}$ für ein $\varphi\in[0,2\pi)$

$$\frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \cos(\varphi)\in\mathbb{R}, \qquad \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \sin(\varphi)\in\mathbb{R}.$$

Wegen $\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)=1$ ist somit $\tilde{R}(e^{i\varphi}) = e^{-i\varphi}\cdot R(\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ wegen der Voraussetzung an R wohldefiniert, so dass $\tilde{R}$ keine Singularität auf $\partial B_1(0)$ hat. Da $\tilde{R}$ endlich viele Singularitäten in $\overline{B_2(0)}$ hat, ist somit $\tilde{R}$ holomorph in $B_r(0)\setminus A$ für ein geeignet kleines $r>1$.

Da $B_r(0)$ sternförmig ist und $\partial B_1(0)$ ein geschlossener stückweise glatter Weg in $B_r(0)$ ist, ist $\partial B_1(0)$ nullhomolog in $B_r(0)$. Weiter gilt $n(\partial B_1(0),z)=1$ für alle $z\in B_1(0)$ nach Beispiel 4.16. Daher folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{\partial B_1(0)} \tilde{R}(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i\sum_{z\in A} n(\partial B_1(0),z)\cdot res(\tilde{R};z) = 2\pi i \sum_{z\in A} res(\tilde{R};z).$$

Weiter gilt mit $\gamma(t):=e^{it}$ für $t\in[0,2\pi]$ und obiger Berechnung von $\tilde{R}(e^{it})$

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} \tilde{R}(z)\,dz &= \int_\gamma \tilde{R}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \tilde{R}\left(e^{it}\right)\cdot i\cdot e^{it}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-it}\cdot R(\cos(t),\sin(t))\cdot i\cdot e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} R(\cos(t),\sin(t))\,dt.\end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungsketten folgt die Behauptung.

(b) Es sei $f(t):=\cos(t)+\sin(t)$ für $t\in[0,2\pi]$. Dann gilt $f(0)=f(2\pi)=1$ und $f'(t)=-\sin(t)+\cos(t)$ für $t\in[0,2\pi]$. Es gilt also für $t\in[0,2\pi]$

$$f'(t)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin(t)=\cos(t) \quad\Longleftrightarrow\quad t\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}.$$

Daher nimmt f sein Minimum in $[0,2\pi]$ entweder an einem der beiden kritischen Punkte oder an einem der beiden Randpunkte des Intervalls an. Somit folgt

$$\min_{t\in[0,2\pi]} f(t) = \min\left\{f(0), f(2\pi), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\} = \min\{1,1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2}.$$

Wegen $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ ist somit $R(x,y) := \frac{1}{\sqrt{3}+x+y}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2+y^2=1$ wohldefiniert. Um das Integral mit Teil (a) zu berechnen, berechnen wir zunächst $\tilde{R}$. Es gilt wegen $\frac{1}{i} = -i$ und $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2}$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(z) &= \frac{1}{z}\cdot R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} \\
&= \frac{2}{2\sqrt{3}\,z+z^2+1-iz^2+i} = \frac{2}{1-i}\cdot\frac{1}{z^2+\frac{2\sqrt{3}}{1-i}z+\frac{1+i}{1-i}} \\
&= \frac{1+i}{z^2+\sqrt{3}(1+i)z+\frac{(1+i)^2}{2}} = \frac{1+i}{z^2+\sqrt{3}(1+i)z+i}.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners sind mit Definition 3.26 gegeben durch

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \sqrt{\frac{3}{4}\cdot 2i - i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \sqrt{\frac{i}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{e^{i\pi}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}(\ln(1)+\pi)} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \pm \frac{1+i}{2} = \frac{1+i}{2}\cdot(-\sqrt{3}\pm 1).
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
|z_1| &= = \left|\frac{1+i}{2}\cdot(-\sqrt{3}+1)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \\
|z_2| &= = \left|\frac{1+i}{2}\cdot(-\sqrt{3}-1)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}+1) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1,
\end{aligned}$$

so dass z_1 die einzige Singularität von $\tilde{R}$ in $B_1(0)$ ist. Somit folgt mit Teil (a), da $\tilde{R}$ in z_1 einen Pol erster Ordnung hat und $\tilde{R}(z) := \frac{1+i}{(z-z_1)(z-z_2)}$ gilt,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}+\cos(t)+\sin(t)}\,dt &= 2\pi\cdot res(\tilde{R}; z_1) = 2\pi \lim_{z\to z_1}\left\{(z-z_1)\tilde{R}(z)\right\} \\
&= 2\pi \lim_{z\to z_1}\frac{1+i}{z-z_2} = 2\pi\frac{1+i}{z_1-z_2} = 2\pi\frac{1+i}{1+i} = 2\pi.
\end{aligned}$$

(c) Da $\cos(t)$ eine gerade Funktion ist und 2π-periodisch ist, gilt

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\cos(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos(t)}\,dt.$$

Wegen $2+\cos(t) > 0$ für alle $t\in[0,2\pi]$ ist $R(x,y) := \frac{1}{2+x}$ für $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x^2+y^2=1$ wohldefiniert. Um das Integral mit Teil (a) zu berechnen, berechnen wir zunächst $\tilde{R}$. Es gilt

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z}\cdot R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \frac{2}{4z+z^2+1} = \frac{2}{z^2+4z+1}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch

$$z_{1,2} = -2\pm\sqrt{4-1} = -2\pm\sqrt{3}.$$

Wegen

$$|z_1| = |-2+\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} < 1, \qquad |z_2| = |-2-\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3} > 1$$

ist z_1 die einzige Singularität von $\tilde{R}$ in $B_1(0)$. Somit folgt mit Teil (a), da $\tilde{R}$ in z_1 einen Pol erster Ordnung hat und $\tilde{R}(z) := \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}$ gilt,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos(t)}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot res(\tilde{R}; z_1) \\
&= \pi \lim_{z\to z_1} \left\{(z-z_1)\tilde{R}(z)\right\} = \pi \lim_{z\to z_1} \frac{2}{z-z_2} = \pi\frac{2}{z_1-z_2} \\
&= \pi\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 2:
Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+9)^2}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+4}\,dx.$$

Hinweise: 1. Rechteckweg $-R, R, R+iR, -R+iR$.
2. Betrachte die Fortsetzung des Integranden auf $G := \mathbb{C}\setminus\{iy \mid y\in(-\infty,0]\subset\mathbb{R}\}$ und nutze Halbkreise durch die obere Halbebene mit Radien ε und R.

Lösung:

(a) Mit $f(z) := \frac{e^{iz}}{(z^2+9)^2}$ gilt $\frac{\cos(x)}{(x^2+9)^2} = Re(f(x))$ für $x\in\mathbb{R}$. Weiter gilt $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-3i)^2(z+3i)^2}$, so dass f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{3i,-3i\}$ ist und in $3i$ und $-3i$ jeweils einen Pol zweiter Ordnung hat. Mit $H := \{z\in\mathbb{C} \mid Im(z) > -1\}$ ist H konvex und damit sternförmig sowie offen und zusammenhängend, also ein sternförmiges Gebiet. Es sei nun $R > 3$ und γ_R der Rand des Rechteckes mit den in dieser Reihenfolge durchlaufenen Eckpunkten $-R$, R, $R+iR$ und $-R+iR$. Dann ist γ_R ein geschlossener stückweise glatter Weg in H, der das durch γ_R berandete Rechteck M_R im mathematisch positiven Sinn umläuft. Somit gilt insbesondere $n(\gamma_R, z) = 1$ für alle $z\in M_R$ nach Aufgabe 5 von Übungsblatt 11. Außerdem ist γ_R nullhomolog in H nach Proposition 8.4, da H sternförmig ist. Wegen $3i\in M_R$ und $-3i\in\mathbb{C}\setminus H$ ist somit f holomorph in $H\setminus\{3i\}$. Somit folgt aus dem Residuensatz und Proposition 8.7 mit $g(z) := \frac{e^{iz}}{(z+3i)^2}$, da f in $3i$ einen Pol zweiter Ordnung hat,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\cdot n(\gamma_R, 3i)\cdot res(f;3i) = 2\pi i\cdot res(f;3i) \\
&= 2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left\{(z-3i)^2 f(z)\right\} = 2\pi i\cdot\lim_{z\to 3i} g'(z) \\
&= 2\pi i\cdot\lim_{z\to 3i}\frac{ie^{iz}\cdot(z+3i)^2 - e^{iz}\cdot 2(z+3i)}{(z+3i)^4} \\
&= 2\pi i\cdot\frac{ie^{-3}\cdot(6i)^2 - e^{-3}\cdot 2\cdot 6i}{(6i)^4} = 2\pi i e^{-3}\frac{-36i-12i}{6^4} \\
&= 2\pi i e^{-3}\cdot\frac{-i}{27} = \frac{2\pi}{27e^3}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &:= t, \qquad t\in[-R,R], \\
\alpha_2(t) &:= R+it, \qquad t\in[0,R], \\
\alpha_3(t) &:= -t+iR, \qquad t\in[-R,R], \\
\alpha_4(t) &:= -R+i(R-t), \qquad t\in[0,R],
\end{aligned}$$

folgt dann

$$\frac{2\pi}{27e^3} = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^4\int_{\alpha_k} f(z)\,dz = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{(t^2+9)^2}\,dt + \sum_{k=2}^4\int_{\alpha_k} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\alpha_2} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^R \frac{e^{i(R+it)}}{((R+it)^2+9)^2}\cdot i\,dt\right| \le \int_0^R \frac{|e^{iR}\cdot e^{-t}|}{(|R+it|^2-9)^2}\cdot |i|\,dt \\
&\le \int_0^R \frac{1\cdot e^{-t}}{(R^2-9)^2}\,dt = \frac{1}{(R^2-9)^2}\cdot \int_0^R e^{-t}\,dt \\
&= \frac{1}{(R^2-9)^2}\cdot \left(-e^{-R}+e^0\right) \to 0 \qquad \text{für } R\to\infty, \\
\left|\int_{\alpha_3} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{-R}^R \frac{e^{i(-t+iR)}}{((-t+iR)^2+9)^2}\cdot (-1)\,dt\right| \\
&\le \int_{-R}^R \frac{|e^{-it}\cdot e^{-R}|}{(|-t+iR|^2-9)^2}\cdot |(-1)|\,dt \le \int_{-R}^R \frac{1\cdot e^{-R}}{(R^2-9)^2}\,dt \\
&= \frac{e^{-R}}{(R^2-9)^2}\cdot \int_{-R}^R 1\,dt = \frac{2Re^{-R}}{(R^2-9)^2} \to 0 \qquad \text{für } R\to\infty, \\
\left|\int_{\alpha_4} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^R \frac{e^{i(-R+i(R-t))}}{((-R+i(R-t))^2+9)^2}\cdot (-i)\,dt\right| \\
&\le \int_0^R \frac{|e^{-iR}\cdot e^{-(R-t)}|}{(|-R+i(R-t)|^2-9)^2}\cdot |-i|\,dt \le \int_0^R \frac{1\cdot e^{-(R-t)}}{(R^2-9)^2}\,dt \\
&= \frac{1}{(R^2-9)^2}\cdot \int_0^R e^{-(R-t)}\,dt = \frac{1}{(R^2-9)^2}\cdot \left(e^0-e^{-R}\right) \\
&\to 0 \qquad \text{für } R\to\infty.
\end{aligned}$$

Somit folgt aus (2) für $R\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+9)^2}\,dt = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{(t^2+9)^2}\,dt\right) = Re\left(\frac{2\pi}{27e^3}\right) = \frac{2\pi}{27e^3}.$$

(b) Es sei $G := \mathbb{C}\setminus\{iy \mid y\in(-\infty,0]\subset\mathbb{R}\}$. Dann ist die Funktion

$$g : G\to\mathbb{C},\, g(z) := \ln(|z|) + i\cdot \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z) \quad \text{für } z\in G,$$

holomorph in G und ein Zweig des Logarithmus in G nach Proposition 3.16, da $G = \{z\in\mathbb{C} \mid \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z) \ne -\frac{\pi}{2}\}$ gilt. Weiter sei $f(z) := \frac{g(z)}{z^2+4} = \frac{g(z)}{(z-2i)(z+2i)}$. Dann ist f holomorph in $G\setminus\{2i\}$ mit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+4}$ für $x\in(0,\infty)\subset\mathbb{R}$. Außerdem ist G sternförmig (analog zur Sternförmigkeit von $\mathbb{C}^-$). Für $\varepsilon\in(0,1)$ und $R>2$ sei nun $\gamma_{\varepsilon,R}$ der Weg, der die vier Wege

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &:= t, & t&\in[\varepsilon,R], \\
\alpha_2(t) &:= R\cdot e^{it}, & t&\in[0,\pi], \\
\alpha_3(t) &:= t, & t&\in[-R,-\varepsilon], \\
\alpha_4(t) &:= \varepsilon\cdot e^{-it}, & t&\in[-\pi,0],
\end{aligned}$$

in dieser Reihenfolge hintereinander durchläuft. Dann ist $\gamma_{\varepsilon,R}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg in G, der das durch $\gamma_{\varepsilon,R}$ berandete Gebiet $M_{\varepsilon,R} := \{\rho\, e^{i\varphi} \mid \rho\in(\varepsilon,R), \varphi\in(0,\pi)\}$ im mathematisch positiven Sinn umläuft.

Daher gilt $n(\gamma_{\varepsilon,R},z) = 1$ für alle $z\in M_{\varepsilon,R}$. Dies sieht man mit Hilfe von Aufgabe 5 von Übungsblatt 11 folgendermaßen. Für $\rho>0$ sei

$$\beta_\rho := \begin{cases} t & \text{für } t\in[-\rho,\rho], \\ \rho\cdot e^{i(t-\rho)} & \text{für } t\in(\rho,\rho+\pi]. \end{cases}$$

Dann ist β_ρ der Rand von $M_{0,\rho}$ und für $z\in M_{\varepsilon,R}$ gilt $z\in M_{0,R}\setminus\overline{M_{0,\varepsilon}}$. Somit gilt $n(\beta_R,z)=1$ und $n(\beta_\varepsilon,z)=0$ nach Aufgabe 5 von Übungsblatt 11 und Satz 4.14(c). Daher folgt

$$\begin{aligned}
1 &= n(\beta_R,z) - n(\beta_\varepsilon,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_R} \frac{d\xi}{\xi-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi-z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\Big(\sum_{k=1}^{3}\int_{\alpha_k} \frac{d\xi}{\xi-z} + \int_{\beta_\varepsilon|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}} \frac{d\xi}{\xi-z}\Big) - \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\beta_\varepsilon|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}} \frac{d\xi}{\xi-z} - \int_{\alpha_4} \frac{d\xi}{\xi-z}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{4}\int_{\alpha_k} \frac{d\xi}{\xi-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{d\xi}{\xi-z} = n(\gamma_{\varepsilon,R},z).
\end{aligned}$$

Außerdem ist $\gamma_{\varepsilon,R}$ nullhomolog in G nach Proposition 8.4, da G sternförmig ist. Wegen $2i \in M_{\varepsilon,R}$ und $-2i \in \mathbb{C} \setminus G$ ist somit f holomorph in $G \setminus \{2i\}$. Somit folgt aus dem Residuensatz und Proposition 8.7, da f in $2i$ einen Pol höchstens erster Ordnung hat,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz &= 2\pi i \cdot n(\gamma_{\varepsilon,R}, 2i) \cdot res(f;2i) = 2\pi i \cdot res(f;2i) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{0!} \lim_{z\to 2i} \{(z-2i)f(z)\} = 2\pi i \cdot \lim_{z \to 2i} \frac{g(z)}{z+2i} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{\ln(|2i|) + i \cdot \arg_{-\frac{\pi}{2}}(2i)}{4i} = 2\pi i \cdot \frac{\ln(2) + i \cdot \frac{\pi}{2}}{4i} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \ln(2) + i \cdot \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} \cdot \ln(2) + i \cdot \frac{\pi^2}{4} &= \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\alpha_k} f(z)\,dz \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(t)}{(t^2+4)}\,dt + \sum_{k=2}^{4} \int_{\alpha_k} f(z)\,dz. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_3} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln(|t|) + i \cdot \arg_{-\frac{\pi}{2}}(t)}{t^2+4} \cdot 1\,dt = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln(-t) + i\pi}{(-t)^2+4}\,dt \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(t) + i\pi}{t^2+4}\,dt = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln(t)}{(t^2+4)}\,dt + i\pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(t^2+4)}\,dt, \\
\left| \int_{\alpha_2} f(z)\,dz \right| &\leq L(\alpha_2) \cdot \max_{z \in \alpha_2} \left| \frac{\ln(|z|) + i \cdot \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z)}{z^2+4} \right| \\
&\leq \pi R \cdot \max_{z \in \alpha_2} \frac{|\ln(|z|)| + |\arg_{-\frac{\pi}{2}}(z)|}{|z|^2 - 4} \leq \pi R \cdot \frac{\ln(R) + \pi}{R^2 - 4} \\
&\to 0 \qquad \text{für } R \to \infty, \\
\left| \int_{\alpha_4} f(z)\,dz \right| &\leq L(\alpha_4) \cdot \max_{z \in \alpha_4} \left| \frac{\ln(|z|) + i \cdot \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z)}{z^2+4} \right| \\
&\leq \pi\varepsilon \cdot \max_{z \in \alpha_4} \frac{|\ln(|z|)| + |\arg_{-\frac{\pi}{2}}(z)|}{4 - |z|^2} \leq \pi\varepsilon \cdot \frac{|\ln(\varepsilon)| + \pi}{4 - \varepsilon^2} \\
&\to 0 \qquad \text{für } \varepsilon \searrow 0,
\end{aligned}$$

da $\varepsilon \ln(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0$ gilt. Somit folgt aus (3) mit $R \to \infty$ und $\varepsilon \searrow 0$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \ln(2) + i \cdot \frac{\pi^2}{4} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{(t^2+4)}\,dt + i\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2+4)}\,dt.$$

Durch Übergang zum Realteil auf beiden Seiten der Gleichung folgt dann

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{(t^2+4)}\,dt = \frac{\pi}{4} \cdot \ln(2).$$