

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 2. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar als Funktionen

- a) von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 ,
- b) von \mathbb{C} nach \mathbb{C} (also komplex differenzierbar)?

$$i) f(z) = \text{const} \quad ii) f(z) = z \quad iii) f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \quad iv) f(z) = z\bar{z}?$$

Bestimme auch (anhand der Definition) ihre Ableitung, wenn möglich.

Lösung:

- i) Differenzierbar mit Ableitung 0 (bzw. mit Ableitung $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) auf ganz \mathbb{C} .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- ii) $f'(z) = 1$ (bzw. $f'(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h - z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

- iii) Um hier die Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zu prüfen, schreiben wir zunächst $z = x + iy$ und formen den Ausdruck für den Funktionswert um:

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \left(\cong \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \right)$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist diese Funktion differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Für komplexe Differenzierbarkeit verwenden wir direkt die Definition:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{z}{z(z+h)} - \frac{z+h}{z(z+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z - z - h}{z(z+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{z(z+h)} = -\frac{1}{z^2}.$$

- iv) $f(x + iy) = x^2 + y^2$, also überall reell differenzierbar mit Ableitung $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wäre f in $z \neq 0$ komplex differenzierbar, so müsste (nach Produktregel und iii)) auch $\bar{z} = \frac{1}{z} f(z)$ differenzierbar sein; wir haben aber bereits gesehen, dass das nicht der Fall ist.

Die Stelle $z = 0$ müssen wir noch gesondert betrachten:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0.$$

Hier ist die Funktion also auch komplex differenzierbar.

Präsenzaufgabe 2:

Welche Darstellungsmatrix hat die Abbildung "Multiplikation mit $a + ib$ " als Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 ?

Lösung:

Wir verwenden selbstverständlich die Standardbasis $\{1, i\}$ und betrachten das Bild von $x + iy$ unter der genannten Abbildung:

$$(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx),$$

in Matrizenschreibweise also

$$\begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich lässt sich \mathbb{C} mit der Menge der reellen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ identifizieren. (Mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden sie einen zu \mathbb{C} isomorphen Körper. "Geometrisch betrachtet" handelt es sich bei ihnen gerade um (die Nullmatrix und) die Matrizen der Drehstreckungen im \mathbb{R}^2 .)

Präsenzaufgabe 3:

- a) Zeige: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar, wenn es eine stetige lineare Abbildung $T_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Funktion $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, sodass für alle $h \in \mathbb{C}$

$$f(z + h) = f(z) + T_z h + R(h)$$

gilt und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0$ ist. Bestimme $f'(z)$.

- b) Worin könnte der Vorteil dieser Beschreibung gegenüber dem "Differentialquotienten" liegen?
- c) Aus Analysis II kennen wir eine sehr ähnliche Charakterisierung der Differenzierbarkeit: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $T_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{|h|} = 0$ und

$$f(x + h) = f(x) + T_x h + R(h).$$

Was ist der Unterschied? (Woher wissen wir, dass es einen Unterschied geben **muss**?)

- d) Zeige: Eine weitere äquivalente Definition der Differenzierbarkeit ist die folgende: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist differenzierbar in $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn es eine in 0 stetige Funktion $\hat{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z + h) = f(z) + \hat{f}(h)h.$$

Wie lässt sich hier $f'(z)$ ablesen?

Lösung:

- a) Lineare Abbildungen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} lassen sich durch komplexe 1×1 -Matrizen darstellen (also als "Multiplikation mit einer Zahl").
Ist nun f differenzierbar in z , setze $T_x = f'(z)$. Dann ist (Umstellen der Gleichung) $R(h) = f(z + h) - f(z) - T_z h = f(z + h) - f(z) - f'(z)h$, also

$$\frac{R(h)}{h} = \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Ist umgekehrt die Beschreibung aus der Aufgabenstellung erfüllt, so ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) + T_z h + R(h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(T_z + \frac{R(h)}{h} \right) = T_z,$$

also die Funktion differenzierbar mit $f'(z) = T_z$.

- b) Da hier nicht durch h dividiert werden muss, ist sie auch im Höherdimensionalen anwendbar. Typisches Szenario: Abbildungen zwischen komplexen Banachräumen. (Sobald diese unendlichdimensional sind, ist auch wichtig, dass es sich um eine *stetige* lineare Abbildung handelt.)
- c) Wir haben mit der komplexen Konjugation eine Funktion kennen gelernt, die in dem einen Sinne differenzierbar ist, in dem anderen aber nicht. Die Definitionen dürfen daher nicht übereinstimmen. Die beiden Unterschiede, die in der Formulierung zunächst auffallen, "stetige lineare Abbildung" vs. "lineare Abbildung" und h gegenüber $|h|$, sind irrelevant. Lineare Abbildungen des \mathbb{R}^2 in sich sind immer stetig; ob $\frac{R(h)}{h}$ oder $\frac{|R(h)|}{|h|}$ gegen 0 konvergiert, ist auch egal (weil, im Fall von \mathbb{C} , äquivalent; für \mathbb{R}^2 lässt sich das nicht sinnvoll betragfrei formulieren).

Was sich wesentlich unterscheidet, ist der Begriff der Linearität. In dem einen Fall geht es um \mathbb{R} -Linearität, in dem anderen um \mathbb{C} -Linearität.

Um eine Funktion L linear zu nennen, fordern wir ja (unter anderem)

$$L(\lambda x) = \lambda L(x) \quad \text{für alle Skalare } \lambda.$$

Skalare sind nun aber die Elemente des Körpers, was in dem einen Fall \mathbb{C} , in dem anderen \mathbb{R} ist.

- d) Falls f differenzierbar ist, nutze die Beschreibung aus a) und setze $\hat{f} = T_z + \frac{R(h)}{h}$. Falls diese Beschreibung gilt, setze $T_x := \hat{f}(0)$ und demnach $R(h) = (\hat{f}(h) - \hat{f}(0))h$ und überprüfe die Eigenschaften, die in a) gefordert werden. Die Ableitung $f'(z)$ ist $\hat{f}(0)$.

Präsenzaufgabe 4:

Finde alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

$$a) z^2 = i, \quad b) z^2 - z + 1 = 0.$$

Lösung:

Wir stellen z in der Form $z = x + iy$ mit reellem x, y dar.

- a) Dann wird die Gleichung zu

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = i,$$

es muss also (Vergleich der Imaginär- und Realteile)

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = 1$$

gelten, das heißt $|x| = |y|$. Weil $xy = \frac{1}{2} > 0$, muss also $x = y$ sein und $x^2 = \frac{1}{2}$, d.h. $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad \text{oder} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

- b) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2.$$

Daher ist $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (Argumentative Details werden in der Hausaufgabe noch nachgewiesen.)