Michael Winkler
Johannes Lankeit

22.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 3. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ habe den Realteil

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)) = x^2 + 2axy + by^2, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$.
Welche Werte sind für a und b möglich?
Bestimme jeweils auch f.

Lösung:
Zunächst einmal müssen a, b reell sein. (Sonst erhält man an manchen Stellen einen nicht-reellen Realteil.)
Aber selbst im Fall $a, b \in \mathbb{R}$ ist nicht jede Wahl von a und b erlaubt: u muss harmonisch sein.

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2b,$$

also $b = -1$, an a erhalten wir keine weitere Bedingung.
Wir versuchen daher, auch den Imaginärteil v zu bestimmen. Die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen müssen erfüllt sein:

$$u_x = 2x + 2ay = v_y \qquad u_y = 2ax - 2y = -v_x,$$

also muss (Integration der ersten Gleichung nach y):

$$v(x,y) = 2xy + ay^2 + c(x)$$

mit noch zu bestimmender Funktion c gelten. Damit ist

$$v_x = 2y + c'(x) = 2y - 2ax,$$

also (für ein $d \in \mathbb{R}$)

$$c'(x) = -2ax, \qquad c(x) = -ax^2 + d.$$

Insgesamt erhalten wir also (mit $a, d \in \mathbb{R}$)

$$f(x+iy) = x^2 + 2axy - y^2 + i(2xy + ay^2 - ax^2 + d).$$

Zur Kontrolle prüfen wir die CRDGen:

$$u_x = 2x + 2ay, \qquad u_y = 2ax - 2y, \qquad v_x = 2y - 2ax, \qquad v_y = 2x + 2ay$$

erfüllen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. (Reelle Differenzierbarkeit ist ohnehin klar. (Polynome))

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $a \in \mathbb{C}$. Betrachte die Funktionenfolge, die durch

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + az^n}, \qquad z \in B_1(0),\ n \in \mathbb{N},$$

definiert wird. Untersuche sie auf punktweise, gleichmäßige und kompakte Konvergenz auf $B_1(0)$.

Lösung:
Für $|z| < 1$ konvergiert $z^n \to 0$. Grenzfunktion (punktweise) ist also die konstante Funktion $f \equiv 1$ auf $B_1(0)$.
Im Fall $a = 0$ ist bereits jedes f_n gleich f, die Konvergenz ist also gleichmäßig und erst recht kompakt. (Nichts zu

zeigen.)
Für $a \neq 0$ ist

$$|\frac{1}{1+az^n} - 1| = |\frac{az^n}{1+az^n}| = |\frac{1}{\frac{1}{a}z^{-n}+1}|. \tag{1}$$

Da nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{z\to 1} |\frac{1}{\frac{1}{a}z^{-n}+1}| = \frac{1}{|1+a|}$, wird nicht jede Schranke $\varepsilon > 0$ ab irgendeinem Index n_0 für alle $z \in B_1(0)$ gleichzeitig unterboten, sodass es sich nicht um gleichmäßige Konvergenz handeln kann.
Für die Frage nach kompakter Konvergenz betrachten wir die gleichmäßige Konvergenz auf $B_r(0)$ für $r < 1$ (ähnlich wie im Beweis in der Vorlesung). Wegen $|z| < r < 1$ ist $|z|^{-n} > |r|^{-n} \to \infty$ für hinreichend großes n so groß, dass

$$|\frac{1}{a}z^{-n} + 1| \geq \frac{1}{|a|}r^{-n} - 1$$

positiv ist und außerdem $\frac{1}{|a|}r^{-n} \geq 2$ Die Abschätzung aus (1) lässt sich zu

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{1}{\frac{1}{|a|}r^{-n} - 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{2|a|}r^{-n}} = 2|a|r^n \to 0$$

fortsetzen und wir können gleichmäßige Konvergenz auf dieser Menge ablesen.

Präsenzaufgabe 3:
Stelle die auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ durch

$$z \mapsto \frac{z}{(1-az)(1-bz)}$$

gegebene Funktion durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 dar und bestimme deren Konvergenzradius.

Lösung:
Trick dazu: Partialbruchzerlegung.
Wir wünschen uns, dass man $\frac{z}{(1-az)(1-bz)}$ auch als $\frac{A}{1-az} + \frac{B}{1-bz}$ darstellen kann (mit irgendwelchen noch zu bestimmenden $A, B \in \mathbb{C}$), und versuchen, A und B zu bestimmen.

$$\frac{z}{(1-az)(1-bz)} = \frac{A}{1-az} + \frac{B}{1-bz} = \frac{A - Abz + B - Baz}{(1-az)(1-bz)} = \frac{(A+B) + (-Ab - Ba)z}{(1-az)(1-bz)}$$

führt auf die Bedingungen $A = -B$ und $-Ab - Ba = -Ab + Aa = A(a-b) = 1$, also $A = \frac{1}{a-b}$ und $B = -\frac{1}{a-b}$, d.h.

$$\frac{z}{(1-az)(1-bz)} = \frac{1}{a-b}\frac{1}{1-az} - \frac{1}{a-b}\frac{1}{1-bz}.$$

Den Ausdruck

$$\frac{1}{1-q}$$

könnne wir als geometrische Reihe identifizieren:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

also

$$\frac{z}{(1-az)(1-bz)} = \frac{1}{a-b}\frac{1}{1-az} - \frac{1}{a-b}\frac{1}{1-bz} = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n - \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}(bz)^n = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}(a^n - b^n)z^n.$$

Konvergenzradius ist $\min\{|\frac{1}{a}|, |\frac{1}{b}|\}$. Für betraglich kleinere z konvergieren beide Reihen in dem vorletzten Ausdruck.
Für $z = \frac{1}{a}$ oder $z = \frac{1}{b}$ ist $(a^n - b^n)z^n$ keine Nullfolge.
Die bisherige Rechnung und Argumentation funktioniert natürlich nur für $a \neq b$. (Hast du das gemerkt?)
Falls $a = b$, kann man analog die Ableitung der geometrischen Reihe verwenden, um sofort einen Potenzreihenausdruck zu finden.

Präsenzaufgabe 4:
Beweise oder widerlege: Wenn die Potenzreihen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Konvergenzradien R_A bzw. R_B haben, so hat ihre Summe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ den Konvergenzradius

a) $R_A + R_B$,

b) $\min\{R_A, R_B\}$.

Lösung:
Für $a_n = -b_n$ sind R_A und R_B gleich und möglicherweise endlich. Aber die Summe hat (als Potenzreihe 0) unendlichen Konvergenzradius.
Wie sieht es aus, wenn a_n und b_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nichtnegativ sind?