Michael Winkler
Johannes Lankeit

29.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 4. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Zeige: Existiert $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$, so erfüllt der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

b) Falls $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ nicht konvergiert: Welche der folgenden Beziehungen gelten?

$$R \le \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R = \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R \ge \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$
$$R \le \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R = \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R \ge \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Lösung:

a) Mit $b_n = a_n(z-z_0)^n$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ auf Konvergenz zu untersuchen. Wir verwenden das Quotientenkriterium und untersuchen dazu

$$\lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z-z_0| = |z-z_0| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Nun folgt aus dem Quotientenkriterium Konvergenz, falls dieser Ausdruck < 1 ist, also $|z-z_0| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ und Divergenz, falls $|z-z_0| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Daher ist $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ der Konvergenzradius der Reihe.

b) Falls $|z-z_0| > \limsup |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$, ist $\liminf |\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}| > 1$, also ab einem gewissen n immer $|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}| > |a_n(z-z_0)^n| > 0$. Es handelt sich damit bei $a_n(z-z_0)^n$ nicht um eine Nullfolge und die Reihe divergiert. Also ist $R \le \limsup |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.

Falls $|z-z_0| < \liminf |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$, ist also $\limsup \frac{|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|a_n(z-z_0)^n|} < 1$ und die Reihe konvergiert nach Quotientenkriterium. Daher muss $R \ge \liminf |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ gelten.

Die anderen Beziehungen gelten nicht. Wir geben dazu eine Potenzreihe an, deren Konvergenzradius weder mit $\limsup |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ noch mit $\liminf |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ übereinstimmt. Betrachte $(a_n)_n = (1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots)$. Dann ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gleich 1. (Konvergente Majorante auf $B_1(0)$: Das Doppelte der geometrischen Reihe. Divergenz in 1, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge.) Aber lim inf und lim sup von $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ sind $\frac{1}{2}$ bzw. 2.

Präsenzaufgabe 2:
Es handelt sich bei sin um eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit Ableitung cos. Wie zeigt man das? (Skizziere den Beweis nochmal.)

Lösung:
Der Sinus ist über eine Potenzreihe definiert, deren „Konvergenzkreis“ganz $\mathbb{C}$ ist. Daher ist die Funktion dort („in

dessen Innerem“) holomorph. Auch erhält man im Innern eines Konvergenzkreises die Ableitung einer Potenzreihe durch gliedweises Differenzieren. Dabei erhält man offebar sofort die Definition des Cosinus.

Präsenzaufgabe 3:

Untersuche für $z \in \{1+2i, -4i, 4-3i, -4+i\sqrt{20}\}$, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (n!)^2}{(2n)!} z^n$ konvergent oder divergent ist.

Lösung:

Mit $a_n := \frac{i^n (n!)^2}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$, und $z_0 := 0$ betrachten wir die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Nun gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{|i|^n (n!)^2 \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot |i|^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{|i| \cdot (n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{1 \cdot (n+1)}.$$

Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 4.$$

Daher ist $R := 4$ nach Satz 3.8 der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und der Konvergenzkreis ist $B_R(z_0) = B_4(0)$. Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (n!)^2}{(2n)!} z^n$ nach Satz 3.5 für $|z| < 4$ und sie divergiert für $|z| > 4$. Wegen

$$|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} < 4, \quad |4-3i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5 > 4,$$
$$|-4+i\sqrt{20}| = \sqrt{(-4)^2+20} = 6 > 4$$

divergiert die Reihe für $z \in \{4-3i, -4+i\sqrt{20}\}$ und sie konvergiert für $z = 1+2i$.

$z = -4i$ liegt wegen $|z| = 4$ auf dem Rand des Konvergenzkreises. Daher erhalten wir keine allgemeingültige Aussage und müssen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (n!)^2}{(2n)!} (-4i)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-4i^2)^n (n!)^2}{(2n)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ auf Konvergenz oder Divergenz untersuchen. Es sei $b_n := \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Nun gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n)^2}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} = 1. \end{aligned}$$

Somit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (n!)^2}{(2n)!} (-4i)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

Präsenzaufgabe 4:

Bestimme den Konvergenzradius R und, falls $R \in (0,\infty)$, den Konvergenzkreis der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - i)^n \cdot (z - 5i - 10)^n$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n n!}{(3n)^n} \cdot (z - 2 + i)^n$,

(c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(2+5\sqrt{k})i}{k(k-1)} \cdot (z - 3i)^{k!}$.

Lösung:

(a) Mit $a_n := (\sqrt[n]{n} - i)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $z_0 := 5i + 10$ betrachten wir die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Nun gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |\sqrt[n]{n} - i| = \sqrt{(\sqrt[n]{n})^2 + 1^2}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Somit ist $R := \frac{1}{\sqrt{2}}$ nach Satz 3.8 der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und der Konvergenzkreis ist $B_R(z_0) = B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5i+10)$.

(b) Mit $a_n := \frac{(3+4i)^n n!}{(3n)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, und $z_0 := 2-i$ betrachten wir die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Nun gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{|3+4i|^n n! \cdot (3(n+1))^{n+1}}{(3n)^n \cdot |3+4i|^{n+1}(n+1)!} = \frac{3}{|3+4i|} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{3}{5} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3e}{5}.$$

Daher ist $R := \frac{3e}{5}$ nach Satz 3.8 der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und der Konvergenzkreis ist $B_R(z_0) = B_{\frac{3e}{5}}(2-i)$.

(c) Mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{(2+5\sqrt{k})i}{k(k-1)}, & \text{falls } n = k! \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $z_0 := 3i$ betrachten wir die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Nun gilt für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$|a_{k!}| = \left|\frac{(2+5\sqrt{k})i}{k(k-1)}\right| = \frac{2+5\sqrt{k}}{k(k-1)} \leq \frac{2k+5k}{k \cdot 1} = 7$$

sowie

$$|a_{k!}| = \left|\frac{(2+5\sqrt{k})i}{k(k-1)}\right| = \frac{2+5\sqrt{k}}{k(k-1)} \geq \frac{2}{k!}.$$

Daher folgt $|a_n| \leq 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 1$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k!]{|a_{k!}|} \geq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k!]{\frac{2}{k!}} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k!]{2}}{\sqrt[k!]{k!}} = \frac{1}{1} = 1,$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für $x > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gelten. Somit ist

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

nach Satz 3.8 der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und der Konvergenzkreis ist $B_R(z_0) = B_1(3i)$.