Michael Winkler
Johannes Lankeit

6.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 5. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Beweise die folgenden Aussagen (Proposition 3.11 der Vorlesung):

(e) Für die Funktionen sin und cos gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(z_1+z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2) \qquad \text{für alle } z_1,z_2\in\mathbb{C},\\ \cos(z_1+z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2) \qquad \text{für alle } z_1,z_2\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

sowie der „trigonometrische Satz des Pythagoras"

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=1 \qquad \text{für alle } z\in\mathbb{C}.$$

(f) Die Funktionen sin und cos sind periodisch in $\mathbb{C}$ mit Periode 2π, und die Funktion exp ist periodisch in $\mathbb{C}$ mit Periode $2\pi i$.

Lösung:

(e) Nach Proposition 3.11(b) gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}&\sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}-e^{i(-z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}\right)\\ &\quad +\frac{1}{4i}\left(e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}+e^{i(-z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}\right)=\sin(z_1+z_2)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}&\cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{i(-z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right)\\ &\quad +\frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{i(-z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right)=\cos(z_1+z_2).\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Proposition 3.11(b) für $z\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin^2(z)+\cos^2(z) &= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot(2+2)=1.\end{aligned}$$

(f) Nach Teil (a) gilt für $z\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin(z+2\pi) &= \sin(z)\cos(2\pi)+\cos(z)\sin(2\pi)=\sin(z)\cdot 1+0=\sin(z),\\ \cos(z+2\pi) &= \cos(z)\cos(2\pi)-\sin(z)\sin(2\pi)=\cos(z)\cdot 1-0=\cos(z),\end{aligned}$$

so dass sin und cos periodisch in $\mathbb{C}$ mit Periode 2π sind. Verwendet man dies nun zusammen mit Proposition 3.11(b), so erhält man für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{i(-iz+2\pi)} = \cos(-iz+2\pi) + i\sin(-iz+2\pi) \\ &= \cos(-iz) + i\sin(-iz) = e^{i\cdot(-iz)} = e^z, \end{aligned}$$

so dass exp periodisch in $\mathbb{C}$ mit Periode $2\pi i$ ist.

Präsenzaufgabe 2:

Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$ sei

$$\arg_0(z) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{falls } x > 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{falls } x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen, dass $\arg_0(z) \in [0, 2\pi)$ und

$$z = |z| \cdot e^{i\cdot\arg_0(z)} = |z| \cdot (\cos(\arg_0(z)) + i \cdot \sin(\arg_0(z)))$$

für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gelten. Wie kann man $\arg_0(z)$ geometrisch in der komplexen Ebene bestimmen?

(b) Es sei $\Phi \in \mathbb{R}$. Definiere $\arg_\Phi(z) = f_\Phi(\arg_0(z))$ mit Hilfe einer geeigneten Funktion $f_\Phi : [0, 2\pi) \to [\Phi, \Phi + 2\pi)$, so dass $\arg_\Phi(z) \in [\Phi, \Phi + 2\pi)$ und

$$z = |z| \cdot e^{i\cdot\arg_\Phi(z)} = |z| \cdot (\cos(\arg_\Phi(z)) + i \cdot \sin(\arg_\Phi(z)))$$

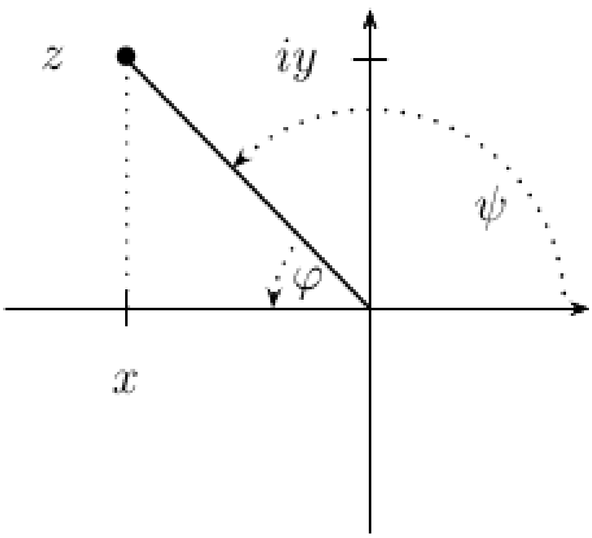
für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gelten.
Was ist $\arg_\Phi$ geometrisch?

(c) Bestimme

$$\arg_0(i), \arg_\pi(i), \arg_{2\pi}(i), \arg_{-3\pi}(i), \arg_0(1 - \sqrt{3}i).$$

Lösung:

(a) Es sei $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$. Es sei φ der im mathematisch positiven Sinn geöffnete Winkel zwischen der Strecke $[0, z]$ und der reellen Achse, der ein Innenwinkel im Dreieck mit den Eckpunkten 0, x und z in der komplexen Ebene ist. Weiter sei ψ der Winkel zwischen $[0, z]$ und der positiven reellen Achse in der komplexen Ebene, der ausgehend von der positiven reellen Achse im mathematisch positiven Sinn geöffnet wird (siehe Zeichnung).



Dann gilt $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $\psi \in [0, 2\pi)$. Durch die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ lässt sich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ darstellen durch $x = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\psi) = |z|\cos(\psi)$ und $y = \sqrt{x^2+y^2}\sin(\psi) = |z|\sin(\psi)$, da ψ auch der Winkel zwischen $[0, (x, y)]$ und der positiven x-Achse im $\mathbb{R}^2$ ist, der ausgehend von der positiven x-Achse im mathematisch positiven Sinn geöffnet wird. Somit gilt mit Proposition 3.11

$$z = x + iy = |z|\cos(\psi) + i|z|\sin(\psi) = |z|(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) = |z|e^{i\psi}, \tag{1}$$

so dass nur noch zu zeigen ist, dass $\psi = \arg_0(z)$ gilt.

Es gilt offenbar $\psi = \frac{\pi}{2}$ im Fall $x = 0$ und $y > 0$ sowie $\psi = \frac{3\pi}{2}$ im Fall $x = 0$ und $y < 0$, da z dann auf der positiven bzw. negativen imaginären Achse liegt. Daher gilt $\psi = \arg_0(z)$ in diesen beiden Fällen.

Für $x \neq 0$ gilt $\tan(\varphi) = \frac{|y|}{|x|}$ nach den Sätzen im rechtwinkligen Dreieck (mit den Eckpunkten $0, x, z$). Wegen $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ folgt dann $\varphi = \arctan\left(\frac{|y|}{|x|}\right)$.

Im Fall $x > 0$ und $y \geq 0$ gilt einerseits $\psi = \varphi$ und andererseits auch $\varphi = \arg_0(z)$, so dass $\psi = \arg_0(z)$ folgt.

Im Fall $x < 0$ und $y \geq 0$ gilt $\psi = \pi - \varphi$. Da tan periodisch mit Periode π und ungerade ist, folgt

$$\tan(\psi) = \tan(-\varphi) = -\tan(\varphi) = -\frac{|y|}{|x|} = \frac{y}{x} = \tan\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \tan(\arg_0(z)).$$

Weiter gilt $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ sowie, wegen $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$, auch $\arg_0(z) \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Da tan auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ injektiv ist, gilt also $\psi = \arg_0(z)$ auch in diesem Fall.

Im Fall $x < 0$ und $y < 0$ gilt $\psi = \pi + \varphi$. Da tan periodisch mit Periode π ist, folgt

$$\tan(\psi) = \tan(\varphi) = \frac{|y|}{|x|} = \frac{y}{x} = \tan\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \tan(\arg_0(z)).$$

Weiter gilt $\psi \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ sowie, wegen $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$, auch $\arg_0(z) \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$. Da tan auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ injektiv ist, gilt also $\psi = \arg_0(z)$ auch in diesem Fall.

Im Fall $x > 0$ und $y < 0$ gilt $\psi = 2\pi - \varphi$. Da tan periodisch mit Periode π und ungerade ist, folgt

$$\tan(\psi) = \tan(-\varphi) = -\tan(\varphi) = -\frac{|y|}{|x|} = \frac{y}{x} = \tan\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \tan(\arg_0(z)).$$

Weiter gilt $\psi \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ sowie, wegen $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, auch $\arg_0(z) \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Da tan auf $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ injektiv ist, gilt also $\psi = \arg_0(z)$ auch in diesem Fall.

Insgesamt gilt also in allen Fällen $\arg_0(z) = \psi \in [0, 2\pi)$. Daher ist $\arg_0(z)$ der Winkel zwischen $[0, z]$ und der positiven reellen Achse in der komplexen Ebene, der ausgehend von der positiven reellen Achse im mathematisch positiven Sinn geöffnet wird. Wegen (1) ist somit die Behauptung gezeigt.

(b) Sei $\Phi \in \mathbb{R}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ müssen wir nun $\arg_\Phi(z)$ ausgehend von Teil (a) so definieren, dass $\cos(\arg_0(z)) = \cos(\arg_\Phi(z))$ und $\sin(\arg_0(z)) = \sin(\arg_\Phi(z))$ gilt. Da sin und cos periodisch mit Periode 2π sind, sollte also $\arg_0(z) - \arg_\Phi(z) = k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten.

Somit definieren wir $f_\Phi : [0, 2\pi) \to [\Phi, \Phi+2\pi)$ wie folgt. Es sei $k_0 \in \mathbb{Z}$ das eindeutige $k \in \mathbb{Z}$, das $k2\pi \in [\Phi, \Phi+2\pi)$ erfüllt. Nun sei

$$f_\Phi(t) := \begin{cases} t + k_0 2\pi, & \text{falls } t \in [0, \Phi + 2\pi - k_0 2\pi), \\ t + (k_0 - 1)2\pi, & \text{falls } t \in [\Phi + 2\pi - k_0 2\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Wegen $k_0 2\pi \in [\Phi, \Phi + 2\pi)$ gilt $\Phi + 2\pi - k_0 2\pi \in (0, 2\pi]$. Weiter folgt für $t \in [0, \Phi + 2\pi - k_0 2\pi)$

$$\Phi \leq k_0 2\pi \leq f_\Phi(t) = t + k_0 2\pi < \Phi + 2\pi$$

und für $t \in [\Phi + 2\pi - k_0 2\pi, 2\pi)$

$$\Phi = \Phi + 2\pi - k_0 2\pi + (k_0 - 1)2\pi \leq f_\Phi(t) = t + (k_0 - 1)2\pi < k_0 2\pi < \Phi + 2\pi.$$

Somit ist f_Φ wohldefiniert und es gilt $f_\Phi(t) - t \in \{k_0 2\pi, (k_0 - 1)2\pi\}$ für alle $t \in [0, 2\pi)$.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt also $\arg_\Phi(z) := f_\Phi(\arg_0(z)) \in [\Phi, \Phi + 2\pi)$ sowie $\cos(\arg_0(z)) = \cos(\arg_\Phi(z))$ und $\sin(\arg_0(z)) = \sin(\arg_\Phi(z))$. Wegen Teil (a) folgt daher

$$z = |z|e^{i\cdot\arg_\Phi(z)} = |z|\left(\cos(\arg_\Phi(z)) + i \cdot \sin(\arg_\Phi(z))\right).$$

c)

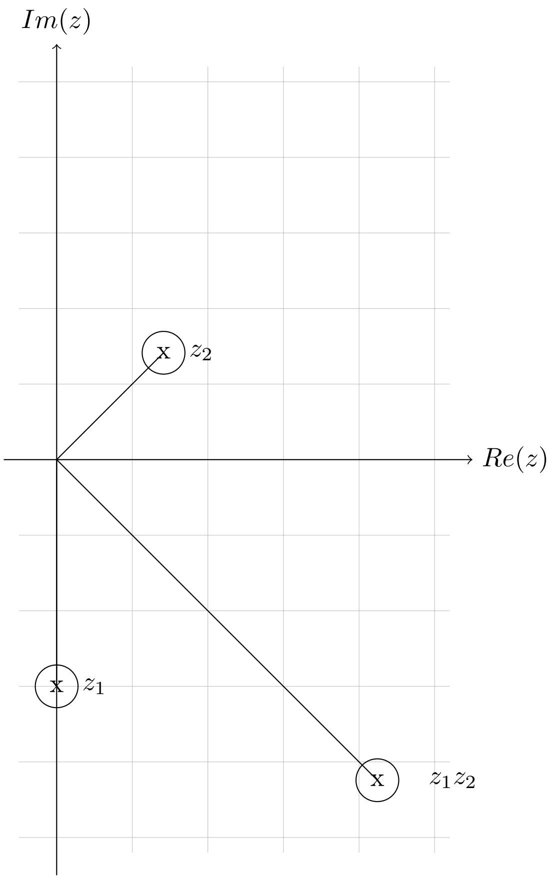
$$\begin{aligned}
\arg_0(i) &= \frac{\pi}{2} \quad &\in [0, 2\pi),\\
\arg_\pi(i) &= \frac{5\pi}{2} \quad &\in [\pi, 3\pi),\\
\arg_{2\pi}(i) &= \frac{5\pi}{2} \quad &\in [2\pi, 4\pi),\\
\arg_{-3\pi}(i) &= -\frac{3\pi}{2} \quad &\in [-3\pi, -\pi),\\
\arg_0(1-\sqrt{3}i) &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) + 2\pi = 2\pi - \arctan\sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3:
Skizziere in der komplexen Zahlebene die Zahlen

$$z_1 = 3e^{-\frac{\pi i}{2}} \qquad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

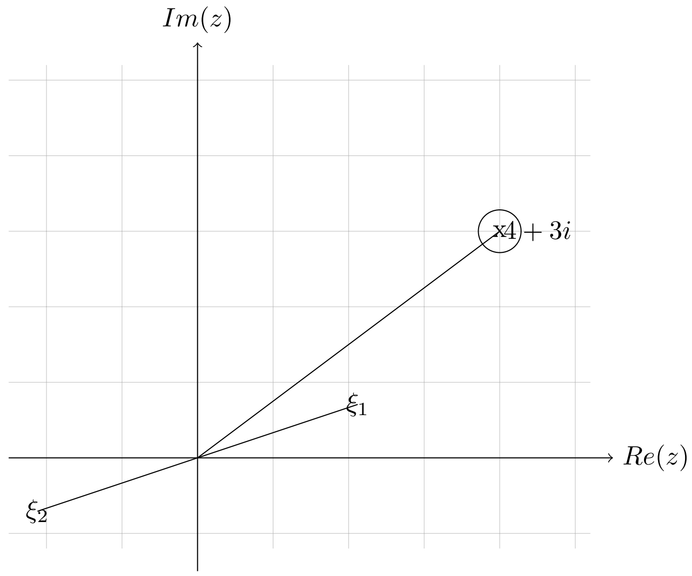
Zeichne außerdem $z_1 z_2$ und alle Lösungen der Gleichung $\xi^2 = 4 + 3i$ ein.

Lösung:
Es ist $z_2 z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 3e^{-\frac{\pi}{2}i} = 6e^{-\frac{\pi}{4}i}$.



Wir beobachten, dass sich beim Multiplizieren die Winkel zur Real-Achse addiert haben. (Siehe auch Hausaufgabe 1.)

Um die Lösungen der Gleichung $\xi^2 = 4 + 3i$ zu bestimmen, überlegen wir uns folgendes: $|z_1| = 5$, also muss $|\xi| = \sqrt{5}$ sein. Außerdem muss der zugehörige Winkel halb so groß sein wie der zu z_1 gehörige. Mit Länge und Winkel können wir bereits die eine Lösung skizzieren (sogar ohne explizit die Winkel ausrechnen zu müssen).
Eine weitere liegt genau einen Halbkreis entfernt.



$Im(z)$
$4+3i$
ξ_1
$Re(z)$
ξ_2