Michael Winkler
Johannes Lankeit

13.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 6. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Berechne (mit den Bezeichnungen aus den Definitionen 3.17 und 3.26 der Vorlesung) die folgenden komplexen Zahlen

(a) $\ln(i)$, $\ln(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2})}{2})$, $\ln(i \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{2}))$.

(b) $\sqrt{1+i}$, $\left(\sqrt{-1+i}\right)^2$, $\sqrt{(-1+i)^2}$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
&\ln(i) = \ln|i| + i\arg_0(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2},\\
&\ln(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2})}{2}) = \ln|-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{2})| + i\arg_0(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2})) = 0 + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\\
&\ln(i \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{2})) = -i\frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass das dritte Ergebnis nicht die Summe der ersten beiden ist, sondern um $2\pi i$ davon abweicht.

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+i} &= e^{\frac{1}{2}\ln(1+i)} = e^{\frac{1}{2}(\ln(|1+i|)+i\cdot\arg_{-\pi}(1+i))} = e^{\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{2})+i\cdot\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})+i\cdot\frac{\pi}{8}}\\
&= e^{\ln((\sqrt{2})^{\frac{1}{2}})} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}},\\
\left(\sqrt{-1+i}\right)^2 &= \left(e^{\frac{1}{2}\ln(-1+i)}\right)^2 = \left(e^{\frac{1}{2}(\ln(|-1+i|)+i\cdot\arg_{-\pi}(-1+i))}\right)^2 = \left(e^{\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{2})+i\cdot\frac{3\pi}{4})}\right)^2\\
&= \left(e^{\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})+i\cdot\frac{3\pi}{8}}\right)^2 = \left(e^{\ln((\sqrt{2})^{\frac{1}{2}})} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{8}}\right)^2 = \left((\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{8}}\right)^2\\
&= \left(\sqrt[4]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{8}}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 \cdot e^{2i\cdot\frac{3\pi}{8}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} = -1+i,\\
\sqrt{(-1+i)^2} &= \sqrt{1-2i+(-1)} = \sqrt{-2i} = e^{\frac{1}{2}\ln(-2i)} = e^{\frac{1}{2}(\ln(|-2i|)+i\cdot\arg_{-\pi}(-2i))}\\
&= e^{\frac{1}{2}(\ln(2)-i\cdot\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)-i\cdot\frac{\pi}{4}} = e^{\ln(2^{\frac{1}{2}})} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}} = 1-i.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 2:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1.$$

Was ist hier falsch?

Lösung:
Der Schritt $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$ funktioniert nicht. (Das hat damit zu tun, dass die Wahl $\sqrt{-1} = i$ statt $\sqrt{-1} = -i$ "willkürlich" war und die Wurzel entlang $(-\infty, 0)$ unstetig ist, vgl. Beweis von Bemerkung 3.28.) Für ähnliche Phänomene betrachte auch Proposition 3.21. Oder die letzte Teilaufgabe der Präsenzaufgabe 1.

Unter welchen Bedingungen kann man Wurzeln doch auf diese Art auseinanderziehen?

Präsenzaufgabe 3:
Gib ein maximales Gebiet an, auf dem $Ln(1+\sqrt[3]{z})$ als holomorphe Funktion definiert werden kann.

Lösung:
Wir betrachten das Gebiet $G = \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Hier lässt sich mithilfe des Hauptzeigs des Logarithmus

$$\ln(z) = \ln|z| + i\mathrm{arg}_0(\mathrm{z})$$

durch

$$\sqrt[3]{z} = e^{\frac{1}{3}\ln(z)}$$

eine holomorphe dritte Wurzel definieren, die auch

$$\sqrt[3]{z} = e^{\frac{1}{3}\ln|z| + \frac{i}{3}\mathrm{arg}_0(\mathrm{z})} \in e^{\frac{1}{3}\ln|z| + \frac{i}{(}-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})} \subset G$$

für $z \in G$ erfüllt, sodass $1+\sqrt[3]{z} \in G$ und

$$z \mapsto \ln(1+\sqrt[3]{z})$$

eine auf G wohldefinierte holomorphe Funktion ist.
Angenommen nun, es gäbe ein größeres Gebiet $\widehat{G} \supsetneq G$ sowie eine holomorphe Funktion $\widehat{f}\colon G \to \mathbb{C}$ darauf mit

$$\widehat{f}(z) = \widehat{Ln}(1+\widehat{\sqrt[3]{z}}).$$

Dann wäre aber auch

$$z \mapsto \exp(\widehat{f}(z)) - 1 = \widehat{\sqrt[3]{z}})$$

holomorph auf $\widehat{G}$.
Insbesondere müsste es eine holomorphe Fortsetzung der dritten Wurzel auf dieses Gebiet geben. Warum kann es nicht einfach eine ganz andere Funktion als die gleich verwendete sein? Wenn x die Gleichung $x^3 = z$ löst, muss nach Proposition 3.21 $3\ln x + k\pi i = \ln z$ mit $k \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ gelten, also $x = \exp(\frac{1}{3}(\ln z + k\pi i))$, worin (aus Stetigkeitsgründen) k fest ist.
Wegen $\widehat{G} \supsetneq G$ müsste es $z \in \widehat{G} \cap (-\infty, 0)$ geben. An dieser Stelle gölte aber aus Stetigkeitsgründen oBdA

$$\widehat{f}(z) = \lim_{\varphi\uparrow\pi} \sqrt[3]{|x|e^{i\varphi}} = \lim_{\varphi\uparrow\pi} |x|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\varphi}{3}} = |x|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

und zugleich

$$\widehat{f}(z) = \lim_{\varphi\searrow-\pi} \sqrt[3]{|x|e^{i\varphi}} = \lim_{\varphi\searrow-\pi} |x|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\varphi}{3}} = |x|^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

was nicht sein kann. Daher war G ein maximales Gebiet mit der gesuchten Eigenschaft.

Präsenzaufgabe 4:
i^i ist reell. Gibt es noch andere Werte $z \in \mathbb{C}$, sodass z^i reell ist?

Lösung:

$$z^i = e^{i\ln(z)} = e^{i\ln|z| - \mathrm{arg}_0(z)} = e^{-\mathrm{arg}_0(z)} e^{i\ln(z)}$$

Diese Zahl ist sicherlich genau dann reell, wenn $e^{i\ln|z|}$ es ist, also wenn $i\ln|z| \in i\pi\mathbb{Z}$, d.h. $|z| = e^{k\pi}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.