Michael Winkler
Johannes Lankeit

20.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 7. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Parametrisiere die folgenden Wege:

a) Die Strecke von 0 nach $1 + i$.

b) Den Weg von 0 nach $1 + i$, der zuerst gerade nach rechts und dann gerade nach oben verläuft.

c) Einen Weg von 0 nach $1 + i$ entlang eines Parabelbogenstücks.

d) Einen zweimal im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt $1 + i$ und Radius 2.

Integriere die Funktionen $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ und $g(z) = z$ entlang dieser Wege.

Lösung:

a) $\gamma(t) = (1 + i)t$, $t \in [0, 1]$.

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz = \int_0^1 \mathrm{Re}((1+i)t)(1+i)\ \mathrm{d}t = (1+i)\int_0^1 tdt = \frac{1+i}{2}.$$

$$\int_\gamma zdz = \int_0^1 (1+i)t(1+i)dt = \frac{(1+i)^2}{2} = i.$$

b)

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 1 + (t-1)i, & t \in (1,2] \end{cases}$$

$$\int_\gamma Re(z)dz = \int_0^1 t1dt + \int_1^2 1idt = \frac{1}{2} + i$$

$$\int_\gamma zdz = \int_0^1 t1dt + \int_1^2 (1+it)idt = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i.$$

c) $\gamma(t) = t + t^2 i$,

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz = \int_0^1 t(1+2it)dt = \frac{1}{2} + \frac{2i}{3}.$$

$$\int_\gamma zdz = \int_0^1 (t+t^2 i)(1+2it)dt = \int_0^1 (t + it^2 + 2it^2 - 2t^3)dt = \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} + i\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = i.$$

Es fällt auf, dass bei diesen Wegen, die dieselben Punkte miteinander verbinden, $\int_\gamma zdz$ stets denselben Wert zu liefern scheint, $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz$ aber nicht. Das hat System. Mit welcher Eigenschaft der Funktionen hängt es wohl zusammen?

d) $\gamma(t) = 1 + i + 2e^{-it}$, $t \in [0, 4\pi]$.

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz = \int_0^{4\pi} \mathrm{Re}(1+i+2e^{-it})(-2ie^{-it})\ \mathrm{d}t = -2i\int_0^{4\pi} e^{-it}dt - 4i\int_0^{4\pi} \mathrm{Re}(e^{-it})e^{-it}\ \mathrm{d}t$$
$$= 0 - 4i\int_0^{4\pi} \frac{e^{-it} + \overline{e^{-it}}}{2} e^{-it}\ \mathrm{d}t = -2i\int_0^{4\pi} e^{-2it} + 1\ \mathrm{d}t = -8\pi i.$$

$$\int_\gamma zdz = \int_0^{4\pi} (1+i+2e^{-it})(-2ie^{-it})dt = -2(1+i)\int_0^{4\pi} e^{-it}dt - 4i\int_0^{4\pi} e^{-2it}dt = 0.$$

Präsenzaufgabe 2:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg sowie $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig.
Weiter sei $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$.
Zeige, dass

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

gilt.

Lösung:
Mit $s(t) = a + b - t$, $t \in [a, b]$, gilt $\frac{ds}{dt} = -1$, $s(a) = b$ und $s(b) = a$. Somit folgt mit der Substitutionsregel für Riemann-Integrale

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(a+b-t))\,dt \\
&= \int_{s(b)}^{s(a)} f(\gamma(s(t))) \cdot \gamma'(s(t))\,(-dt) = \int_b^a f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\,ds \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\,ds = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3:
Zeige:

a) Sind $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ und ist $\gamma(t) = z_0 + re^{\pm it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} \pm 1, & \text{falls } z \in B_r(z_0), \\ 0, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

b) Sind $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2k\pi]$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} \pm k, & \text{falls } z \in B_r(z_0), \\ 0, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

Lösung:
Die Umlaufzahl ist nach Satz 4.14 b) konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Diese Zusammenhangskomponenten sind hier $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$ sowie $B_r(z_0)$. Dabei ist nach Satz 4.14 c) $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$, da diese Komponente unbeschränkt ist. Um $n(\gamma, z)$ für $z \in B_r(z_0)$ zu bestimmen, rechnen wir $n(\gamma, z_0)$ aus (vgl. Prop. 4.12):

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{\pm it} - z_0} r(\pm i) e^{\pm it} dt = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} re^{\mp it} e^{\pm it}\,\mathrm{d}t = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = \pm 1.$$

Die einzige Änderung für Teil b) ist, dass die obere Integrationsgrenze zu $2\pi k$ wird.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \colon G \to \mathbb{C}$ holomorph (mit stetiger Ableitung f') sowie γ ein SGW in G mit Anfangs- bzw. Endpunkt a bzw. b.
Zeige, dass dann

$$\int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Lösung:
Es sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert durch $g = f \circ \gamma$. Dann ist mit f und γ auch g (reell) differenzierbar. Und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (und wer dem in $\mathbb{C}$ noch nicht traut, schreibe ihn für Real- und Imaginärteil getrennt auf) ist

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f'(\zeta)d\zeta.$$

Wenn γ nicht glatt, sondern nur stückweise glatt ist, argumentiere man für die einzelnen Teilintervalle wie beschrieben und beachte, dass sich die Werte an den inneren Grenzen gegenseitig wegheben.