Michael Winkler
Johannes Lankeit

27.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 8. Übung

Präsenzaufgabe 1:

a) Skizziere ein sternförmiges Gebiet G mit zwei Punkten $z_1, z_2 \in G$ derart, dass z_1 ein Zentrum ist, z_2 aber nicht.

b) Ist dein Gebiet G aus a) auch konvex?

Lösung:

a) Z.B. $G = \mathbb{C}^-$, $z_1 \in [0, \infty)$, $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z_2) \neq 0$.

b) Nein, in konvexen Gebieten ist jeder Punkt ein Zentrum.

Präsenzaufgabe 2:
Berechne die folgenden Integrale:

$$a) \int_{\partial B_3(2i)} \frac{3}{z-2i} dz, \qquad b) \int_{\partial B_3(2i)} \frac{z^2}{z-2i} dz,$$

$$c) \int_{\partial B_3(2i)} \frac{3}{z-i} dz, \qquad d) \int_{\partial B_1(i)} \frac{e^z}{z^2+1} dz,$$

$$e) \int_{\partial B_2(1)} \frac{z^{18} - 2z^4 + \sin(z)}{(z-4)^2(z+3i)} dz, \qquad f) \int_{\partial B_2(2+i)} \frac{\ln(z)}{z^2-2} dz.$$

Lösung:
Die Cauchy'sche Integralformel

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

erlaubt uns, Integrale wie in der Aufgabe einfacher zu berechnen. Hauptsache ist hier also, die korrekte (holomorphe!) Funktion f abzulesen (und darauf zu achten, dass $z \in B_r(z_0)$). Vielleicht sollte man dazusagen, dass das z hier trotz Symbolgleichheit nicht die Integrationsvariable aus der Aufgabenstellung ist.

a) $f(z) = 3$, $z = 2i$; Wert des Integrals $6\pi i$.

b) $f(z) = z^2$, $z = 2i$; Wert des Integrals $2\pi i \cdot (2i)^2 = -8\pi i$.

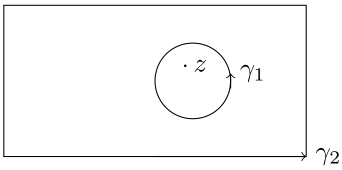
c) $f(z) = 3$, $z = i$; Wert des Integrals $6\pi i$. (Dass i nicht der Mittelpunkt des Kreises ist, stört nicht weiter.)

d) $\frac{e^z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i}\frac{e^z}{z+i}$. Wählen wir also $f(z) = \frac{e^z}{z+i}$ (diese Funktion ist holomorph auf einer Umgebung von $B_1(i)$) und lesen den Wert des Integrals als $2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{i+i} = \pi e^i$ ab.

e) Hier hat der Nenner gar keine Nullstelle in $B_2(1)$, es handelt sich also um das Integral einer holomorphen Funktion entlang eines geschlossenen Weges. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral 0.

f) $\frac{\ln(z)}{z^2-2} = \frac{1}{z-\sqrt{2}} \frac{\ln(z)}{z+\sqrt{2}}$. Dabei liegt $\sqrt{2} \in B_2(2+i)$, da $|2+i-\sqrt{2}|^2 = 7-4\sqrt{2} < 2^2$, aber $-\sqrt{2} \notin B_2(2+i)$ und auch die negative reelle Achse schneidet $B_2(2+i)$ nicht, sodass $f(z) = \frac{\ln(z)}{z+\sqrt{2}}$ dort eine holomorphe Funktion definiert. Wir erhalten für den Wert des Integrals $2\pi i f(\sqrt{2}) = \frac{i\pi \ln 2}{2\sqrt{2}}$.

Präsenzaufgabe 3:



Zeige: $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$.

Lösung:
Zeichne zunächst Hilfswege ein: Strecken, die je von einer Ecke des Rechtecks auf den Punkt z zu, bis hin zum Kreis, verlaufen. Sie zerteilen die Fläche zwischen Kreis und Rechteck in vier Teilgebiete.

Der Integrand in der Definition der Umlaufzahl ist (außerhalb von z) eine holomorphe Funktion. Sein Integral entlang eines jeden Randes eines der o.g. Teilgebiete verschwindet nach dem Cauchyschen Integralsatz. (Nicht vergessen, ein sternförmiges Gebiet zu finden, in dem der Weg enthalten, und auf dem die Funktion holomorph ist!)

Aufaddieren der einzelnen Integrale liefert $0 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ und damit Gleichheit der Umlaufzahlen.

Ein entsprechender Beweis kann verwendet werden, um die Cauchy'sche Integralformel für Wege zu zeigen, die selbst keine Kreisränder sind.

Präsenzaufgabe 4:
In Hausaufgabe 5 auf Übungsblatt 6 haben wir die Funktion

$$\arctan \colon \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right).$$

definiert und nachgewiesen, dass sie holomorph ist und den Tangens umkehrt.
Zeige: Für $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\}$ ist

$$\arctan(w_0) = \int_{[0,w_0]} \frac{1}{1+w^2} dw.$$

Kann der wie auf Blatt 6 definierte Arcustangens holomorph auf eine echt größere Menge fortgesetzt werden?
Tipp: Nimm in deiner Argumentation ein geeignetes Wegintegral zu Hilfe.

Lösung:
Der oben gegebene Definitionsbereich ist sternförmig mit Zentrum 0. $w \mapsto \frac{1}{1+w^2}$ ist holomorph. Nach Lemma 5.6 hat demzufolge $w_0 \mapsto \int_{[0,w_0]} \frac{1}{1+w^2} dw$ die Ableitung $w \mapsto \frac{1}{1+w^2}$. Dies ist auch die Ableitung von arctan. (Kettenregel auf obige Definition anwenden.)

Außerdem stimmen beide Funktionen in 0 überein; sie müssen also (auf dem gesamten (zusammenhängenden) Definitionsbereich) gleich sein.

Gäbe es in einem etwaigen vergrößerten Definitionsbereich $x = \lambda i$ mit $|\lambda| \geq 1$ (oBdA: $\lambda > 1$), so gäbe es einen kompletten, i umlaufenden Weg γ im Schnitt von Definitionsbereich und oberer Halbebene.

Die Ableitung der erweiterten Funktion müsste (aus Stetigkeitsgründen) noch immer $w \mapsto \frac{1}{1+w^2}$ sein. Das Integral dieser Funktion entlang des o.g. Weges müsste (wegen der Existenz einer Stammfunktion) verschwinden - was es aber nicht tut.

Denn $f(z) = \frac{1}{1-iz}$ ist eine in der (sternförmigen!) oberen Halbebene holomorphe Funktion und daher

$$\int_\gamma \frac{1}{1+w^2} dw = \int_\gamma \frac{f(z)}{1+iz} dz = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi f(i) = 2\pi \frac{1}{2} = \pi \neq 0$$

nach der Cauchyschen Integralformel.