Michael Winkler
Johannes Lankeit

10.6.2014

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 9. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Es seien $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Ferner sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung von $B_r(z_0)$ holomorph. Definiere die Funktion $g\colon \mathbb{C} \setminus \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Bestimme $g(z_0)$ sowie $g(z_0 + 2ir)$.
Zeige: g ist holomorph.

Lösung:
In $B_r(z_0)$ ist $g = f$, also holomorph nach Voraussetzung. Auf $\mathbb{C} \setminus B_r(z_0)$ ist $g = 0$; auch das ist eine holomorphe Funktion.

Präsenzaufgabe 2:
($\star$) In Dunford/Schwartz: Linear Operators (Part I, VII.3.9) findet sich für gewisse Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und stetige lineare Operatoren $T\colon X \to X$ (wobei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum ist) die folgende Definition für $f(T)$:

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda.$$

(Dabei ist B der im positiven Sinne durchlaufene Rand einer geeigneten offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$.)
Zum Beispiel könnte $X = \mathbb{C}^n$ und T eine komplexe $n \times n$-Matrix sein.

a) Welche Eigenschaft wird von der Funktion f gefordert sein?

b) Wie, vermutest du, ist $R(\lambda; T)$ definiert?

c) Was könnte „geeignete offene Menge“ bedeuten?

Lösung:

a) Holomorphie, was sonst? (Mindestens auf der Menge $U \cup B$.)

b) Damit die Formel so aussieht wie die Cauchysche Integralformel (was sinnvoll sein könnte, weil ja die linke Seite übereinstimmt und auch auf der rechten einige Symbole passen), sollte $R(\lambda; T)$ so etwas sein wie $\frac{1}{\lambda - T}$. Nun ist der Ausdruck formal ein wenig unschön: T soll eine stetige lineare Abbildung sein; also schreiben wir lieber

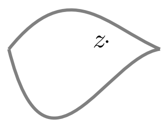
$$R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1},$$

wobei $I\colon X \to X$ die Identität ist.

c) In der Cauchyschen Integralformel sind wir darauf angewiesen, dass der Nenner an einer Stelle im Gebiet nicht existiert, dass also (in der Notation aus Satz 5.11) $\zeta - z$ dort nicht invertierbar ist. Daher ist es im Falle einer $n \times n$-Matrix nicht allzu fernliegend, zu fordern, dass das Spektrum $\sigma(T)$ (also die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda I - T$ nicht invertierbar ist) in U enthalten sein soll.

Auch für stetige lineare Operatoren gibt es ein Spektrum (Näheres dazu erfährt man in der Funktionalanalysis) und tatsächlich ist $U \supset \sigma(T)$ die Bedingung, die in der referierten Definition an U gestellt wird.

Präsenzaufgabe 3:
Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nehme in jedem Punkt der im Folgenden als graue Linie eingezeichneten Menge den Wert 42 an. Auch z sei so, wie aus der Zeichnung hervorgeht. Bestimme $f(z)$.



Lösung:
Mit einem kleinen, z umlaufenden Kreisrand ∂B gilt $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Nun ist aber $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ auf dem gesamten Gebiet zwischen ∂B und der grauen Linie holomorph.
Bezeichnet also γ einen Weg „entlang der grauen Linie“, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz (damit die verwendeten Teilgebiete sternförmig werden, nutze das Argument vom vergangenen Übungsblatt)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{42}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{42}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot 42 = 42.$$

Präsenzaufgabe 4:
f sei holomorph in einer Umgebung von $B_r(z_0)$ und zweimal stetig differenzierbar (was keine weitere Einschränkung ist). Zeige, dass die Funktion

$$z \mapsto \frac{(z - z_0)f'(z_0) - f(z) + f(z_0)}{(z - z_0)^2}$$

in $B_r(z_0)$ beschränkt ist.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned}
f(z) =& f(z_0) + \int_{[z_0,z]} f'(\zeta) d\zeta \\
=& f(z_0) + \int_0^1 f'(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt \\
=& f(z_0) + [(t-1)f'(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)]_0^1 - \int_0^1 f''(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)^2 (t - 1) dt \\
=& f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) - (z - z_0)^2 \int_0^1 f''(z_0 + t(z - z_0))(t - 1) dt.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\left|\frac{(z - z_0)f'(z_0) - f(z) + f(z_0)}{(z - z_0)^2}\right| = \left|\int_0^1 f''(z_0 + t(z - z_0))(t - 1) dt\right|$$

beschränkt durch $\sup_{B_r(z_0)} |f''| \cdot \int_0^1 |t - 1| dt$. (Wobei $|f''|$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der zweiten Ableitung beschränkt ist.)