Michael Winkler
Johannes Lankeit

15. April 2015

Lösungsideen zu den Hausaufgaben der 2. Übung

Hausaufgabe 1:

Untersuche, ob M als Teilmenge des normierten Raums X offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, relativ kompakt, ein Untervektorraum ist, wobei

a) $X = C^0((0,1))$, $M = \{f \in C^0((0,1);\mathbb{R}); f \text{ ist stetig und konvex und es gilt } -42 \le f \le 42\} =: M_{a)}$,

b) $X = L^p((0,1))$, $p \in [1,\infty]$, $M = \{f \in L^p((0,1);\mathbb{R}); f \text{ ist stetig und konvex}^1 \text{und es gilt (f.ü.)} -42 \le f \le 42\}$,

c) $X = L^p((0,\infty))$, $p \in [1,\infty)$, $M = \{f \in L^p((0,\infty)) \cap L^1((0,\infty)); \int_0^\infty f = 0\}$,

d) $X = C^0([0,1])$, $M = \{u \in C^0([0,1]) \cap C^1((0,1));\ -1 < u(0) < 1, -20 < u'(x) < 70 \text{ für } x \in [0,1]\}$,

e) $X = C^0((0,1))$, $M = \{g \in X;\ \text{Es gibt } f \in M_{a)}, \text{ sodass } g(x) = \int_0^x f(s)ds \text{ für alle } x \in (0,1)\}$.

Lösung:

Die meisten Eigenschaften waren leicht zu überprüfen. Ich beschränke mich, was Details angeht, hier auf die (schwierigeren), zu denen Lösungen gewünscht wurden (für alles Weitere sei auf die Korrekturen der Hausübungen verwiesen); bei Bedarf fragt nach. J.

a) Nicht offen, abgeschlossen, beschränkt, kein UR, nicht kompakt (da nicht rel. kpt);
Um zu zeigen, dass M nicht relativ kompakt ist, geben wir eine Folge in M an, die keine konvergente Teilfolge enthält. Möglich wäre z.B. $f_n(x) := x^n$. Angenommen, diese Folge enthielte eine konvergente TF f_{n_k}, so wäre diese punktweise konvergent gegen 0, den p.w. Grenzwert von f_n, und damit auch konvergent im Sinne der Norm auf X gegen 0 (Konvergenz in $X = C^0$ impliziert p.w. Konvergenz und der p.w. Grenzwert ist eindeutig), aber $\|f_{n_k}\| = 1 \not\to 0$.

b) Nicht offen, beschränkt, kein UR, kompakt (da abg. und rel kpt, s.u.).
M ist abgeschlossen. Es sei $(f_n)_n$ eine Folge in M mit Grenzwert f. Da $f_n \to f$ in L^p, ist eine Teilfolge punktweise gegen f konvergent: $f_{n_k} \to f$ p.w.f.ü. (p.w. überall außerhalb der Nullmenge N). Wir folgern, dass (außerhalb einer Nullmenge) f konvex ist, da für $x, y \in (0,1) \setminus N$, $t \in [0,1]$, $f(x) + t(f(y) - f(x)) \leftarrow f_n(x) + t(f_n(y) - f_n(x)) \le f_n(x + t(y-x)) \to f(x + t(y-x))$. Für offene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ gilt: Konvexe Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ sind stetig[2], auch die f.ü. gültige Schranke bleibt unter pwfü-Kgz erhalten, ergo ist $f \in M$.
Die Menge ist auch relativkompakt:
Sei $(u_n)_n \subset M$ eine Folge in M. (Genauer: u_n sei jeweils der stetige, konvexe Repräsentant).
Wegen der Konvexität gilt für jedes einzelne u_n, dass
a) u_n monoton fällt oder
b) u_n monoton wächst oder
c) u_n ein eindeutiges lokales Minimum aufweist.
Wir nehmen c) für alle u_n an (durch Teilfolgenauswahl lässt sich erreichen, dass für alle u_n derselbe Fall eintritt, a) und b) ergeben sich aus (vereinfachenden) Modifikationen des folgenden Beweises.)
Bezeichne mit m_n die Minimalstelle von u_n.

[1] $f \in L^p$ heiße dabei stetig/konvex/..., wenn es $g \in f$ gibt, sodass g diese Eigenschaft hat (bzw. wenn f fast überall mit einer Funktion mit dieser Eigenschaft übereinstimmt).

[2] Zu $x \in I$ betrachte $z < y < x$ oder $x < y < z$ mit $y, z \in I$. Aus der Konvexität folgt

$$f(y) = f\left(\frac{x-y}{x-z}z + \frac{y-z}{x-z}x\right) \le \frac{x-y}{x-z}f(z) + \frac{y-z}{x-z}f(x);$$

für $y \to x$ erhalten wir also $\limsup_{y\to x} f(y) \le f(x)$. Da außerdem $f(x) \le \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(y + 2(x-y))$, also

$$f(x) \le \frac{1}{2}\liminf_{y\to x} f(y) + \frac{1}{2}\limsup_{y\to x} f(y) \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x)$$

gelten. Da hierin „=“ gilt, muss $\liminf_{y\to x} f(y) \ge f(x)$ und $\limsup_{y\to x} f(y) = f(x)$.
Insgesamt folgt $f(x) = \lim_{y\to x} f(y)$.

Wir wählen eine Teilfolge [zur Notation behalten wir der Lesbarkeit halber den bisherigen Index], sodass $m_n \to m_\infty$ konvergiert [$(m_n)_n$ ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen] und $|m_\infty - m_n| < \frac{1}{n}$. (OBdA sei $m_\infty \in (0,1)$.)
Durch sukzessive Auswahl von Teilfolgen und ein abschließendes Diagonalfolgenargument erhalten wir weiterhin eine Teilfolge $(u_n)_n$, sodass $u_n(y) \to: u_\infty(q)$ für alle $q \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ und $u_n(m_\infty) \to: u_\infty(m_\infty)$.
[Achtung, bisher ist u_∞ noch keine auf $(0,1)$ definierte Funktion.]
Da für $x \in (0,1)$ die Menge $\{u_n(x); n \in \mathbb{N}\} \subset [-42, 42]$ beschränkt und nichtleer, existieren

$$\begin{aligned} & u_\infty^+(x) := \limsup_{n\to\infty} u_n(x) \\ \text{und} \quad & u_\infty^-(x) := \liminf_{n\to\infty} u_n(x). \end{aligned}$$

Für $x \in (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \cup \{m_\infty\}$ gilt offenbar $u_\infty^+(x) = u_\infty^-(x)$.
u_∞^+ und u_∞^- sind auf $(0, m_\infty)$ monoton fallend und auf $(m_\infty, 1)$ monoton wachsend und damit insbesondere stetig außerhalb einer abzählbaren Menge $N \subset (0,1)$. Damit ist $u_\infty^+ - u_\infty^-$ auf $(0,1) \setminus N$ stetig und aus $u_\infty^+ - u_\infty^- = 0$ auf $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ folgt $u_\infty^+ = u_\infty^-$ auf $(0,1) \setminus N$.
Also gilt für alle $x \in (0,1) \setminus N$, dass $u_n(x) \to u_\infty(x) := u_\infty^+(x)$ für $n \to \infty$.
Da $|u_n(x) - u_\infty(x)|^p \leq 84^p$ und 84^p auf $(0,1)$ integrierbar ist, folgt aus dem Lebesgueschen Satz über dominierte Konvergenz, dass $u_n \to u_\infty$ in $L^p((0,1))$.
Jede Folge in M enthält also eine in $L^p((0,1))$ konvergente Teilfolge (deren Grenzwert natürlich in $\overline{M}$ liegt, sodass also $\overline{M}$ kompakt ist.

c) Unterraum, unbeschränkt, (deshalb auch) nicht rel kpt, nicht kpt. Nicht offen ($\varepsilon\chi_{[0,1)} \in B_\varepsilon(0) \setminus M$). Abgeschlossen für $p = 1$, nicht abgeschlossen für $p > 1$.
$p = 1$: $M \supset f_n \to f$ in L^1, z.z. ist $f \in M$. $f_n \to f$ heißt $\int |f_n - f| \to 0$. Es ist daher $|\int f_n - \int f| \leq \int |f_n - f| \to 0$, also $\int f = \lim \int f_n = 0$ und damit $f \in M$.
$p > 1$: $f_n(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in [1, n)$, $f_n(x) = -\frac{1}{x}$ für $x \in [n, a_n)$, worin a_n so gewählt, dass $\int f_n = 0$ (möglich, da $\lim_{k\to\infty} \int_n^k (-\frac{1}{x}) = -\infty$). Dann gilt p.w. $f_n \to f$ und, da $|f_n - \frac{1}{x}|^p \leq (\frac{2}{x})^p \in L^1$ für $p > 1$, zeigt der Satz von Lebesgue, dass $f_n \to f$ in L^p. Aber offenbar ist $f \notin M$.

d) Nicht offen. In jeder ε-Umgebung einer solchen Funktion gibt es auch nicht-differenzierbare Funktionen (addiere z.B. $(\varepsilon - |\frac{1}{2} - x|)_+$). Nicht abgeschlossen $u \equiv 1 - \frac{1}{n}$ (also auch nicht kompakt). Beschränkt (und $\neq \{0\}$, also kein UR, s.u.); relativ kompakt nach Arzela-Ascoli:
Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{70}$. Dann gilt (nach Mittelwert- bzw. Schrankensatz) für $u \in M$ und $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$, dass $|u(x) - u(y)| \leq 70|x - y| < 70\delta = \varepsilon$. Also ist M gleichgradig gleichmäßig stetig. Außerdem ist für jedes $x \in [0,1]$ die Menge $\{u(x); u \in M\}$ beschränkt (durch 71) und demzufolge die Menge relativ kompakt.

e) Betrachte $F\colon L^p((0,1)) \to C^0((0,1))$, $f \mapsto \int_0^x f(s)ds$. Dies ist eine wohldefinierte und lineare Abbildung; sie ist stetig. Sei nämlich zu $\varepsilon > 0$, $\delta := \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ und $f, g \in L^p((0,1))$ mit $\|f - g\|_{L^p} < \delta$. Dann ist

$$\|Ff - Fg\|_\infty = \sup_x |\int_0^x f(s) - g(s)ds| \leq \int_0^1 |f - g| \leq \int_0^1 |f - g|^p < \delta^p = \varepsilon,$$

also F stetig und $M = FM_{b)}$, worin $M_{b)}$ die Menge aus b) bezeichnet. Als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist also auch M kompakt, relativ kompakt, beschränkt und abgeschlossen und (da $M_{b)}$ nicht offen) auch nicht offen.

Hausaufgabe 2:

Es sei V ein normierter Raum und $B \subset V$ eine offene Kugel. Finde alle Unterräume $U \subset V$, sodass
a) $U \subset B$,
b) $U \supset B$.

Lösung:

„Kugel“sei hier „beschränkte Kugel“.
a) Falls $0 \in B$: Nur $U = \{0\}$. Falls $0 \notin B$: Es gibt keinen UR in B.
b) $U = V$.

Hausaufgabe 3:

Es sei V ein unendlich-dimensionaler normierter Raum und $\delta > 0$. Zeige: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n - x_m\| > 1 - \delta$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Lösung:

OBdA $0 < \delta < 1$.
Zu gegebenen $x_1, \ldots, x_n$ finde mittels Lemma 1.9 x_{n+1} mit $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) > 1 - \delta$.

Hausaufgabe 4:

Es sei V ein normierter Raum und $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Zeige, dass es zu jedem $x \in V$ ein $u_0 \in U$ gibt mit

$$\|x - u_0\| = d(x, U) := \inf\{\|x - u\|; u \in U\}.$$

Ist diese „Projektion von x auf U“ eindeutig?
Welcher Schritt deines Beweises lässt sich nicht ohne Weiteres auf die Situation unendlichdimensionaler Unterräume übertragen?

Lösung:
Wähle Folge u_n mit $\|x - u_n\| \searrow d(x, U)$ (sie existiert nach Definition des Infimums) und zeige, dass sie beschränkt ist. Sie enthält also (Bolzano-Weierstraß, das geht im Unendlichdimensionalen nicht mehr; siehe später aber Kapitel 7) eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert u_0 das Geforderte leistet.
Die Projektion ist schon im $\mathbb{R}^2$ mit Maximumsnorm nicht eindeutig. (Dazu nötige Eigenschaft: „Konvexität“der Norm.)

Hausaufgabe 5:

Finde eine Folge messbarer Funktionen $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, sodass für $p \in [1, \infty)$ stets $\|f_n\|_{L^p} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, aber $\|f_n\|_{L^\infty} \nrightarrow 0$.

Lösung:
Z.B. $\chi_{[0, \frac{1}{n})}$.