Michael Winkler
Johannes Lankeit

3. Juni 2015

Lösungsideen zu den Präsenzaufgaben der 9. Hilbertraummethoden-Übung

Präsenzaufgabe 1:
Beweise das folgende Kriterium dafür, dass eine Teilmenge von $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ relativ kompakt ist:
Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R})$ relativkompakt genau dann, wenn

i) $\mathcal{F}$ beschränkt ist,

ii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \to 0$ für $R \to \infty$,

iii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f(x) - f(x+h)|^p \, \mathrm{d}x \to 0$ für $h \to 0$. ("gleichgradige Stetigkeit im p-ten Mittel")

a) Zeige zunächst die Eigenschaft ii) für einzelne Funktionen aus L^p (also ohne sup).

b) Zeige auch iii) für einzelne Funktionen. Beginne dabei mit dem Fall „charakteristische Funktion eines beschränkten Intervalls“ und approximiere allgemeine L^p-Funktionen durch einfache Funktionen (Treppenfunktionen).

c) Überdecke $\mathcal{F}$ mit endlich vielen Kugeln vom Radius ε. Warum ist das möglich?

d) Nutze die Mittelpunkte f_i der Kugeln und a) für jedes einzelne f_i, um ii) gleichmäßig für beliebiges $f \in \mathcal{F}$ zu zeigen.

e) Verfahre ebenso für iii).

· Zur Rückrichtung.
Definiere für $f \in L^p(\mathbb{R})$ die „Steklov-Mittelung“ durch $(S_r(f))(x) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x+s) \, \mathrm{d}s$.

f) Zeige durch geschickte Anwendung der Hölderschen Ungleichung, dass $\|S_r(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le r^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

g) Zeige ebenso, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|(S_r f)(x) - (S_r f)(x+h)| \le r^{-\frac{1}{p}} \|f - f_h\|_p$$

gilt.

h) Zeige darüberhinaus, dass

$$\|f - S_r f\|_p \le \sup_{0<h\le r} \|f - f_h\|_p$$

. Schätze dazu den Betrag $|(f - S_r f)(x)|$ wieder mit der Hölderschen Ungleichung ab, integriere dann über $\mathbb{R}$ und nutze abschließend den Satz von Fubini.

i) Begründe die folgenden drei Aussagen:
  · Es genügt, zu zeigen, dass eine Überdeckung von $\mathcal{F}$ mit 3ε-Kugeln existiert.
  · Es gibt ein $\overline{R} > 0$, sodass $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-R,R])} < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $R > \overline{R}$.
  · Es gibt ein $r > 0$, sodass

$$\|f - S_r f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \sup_{0\le h\le r} \|f - f_h\| < \varepsilon$$

  für alle $f \in \mathcal{F}, \forall |h| < r$.

j) Zeige: Die Menge $\mathcal{M} = \{\, S_r f|_{[-2R,2R]}\,;\, f \in \mathcal{F}\}$ ist eine relativkompakte Teilmenge von $C([-2R, 2R])$.

k) $\mathcal{M}$ lässt sich von endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{\varepsilon}{4R^{\frac{1}{p}}}$ und Mittelpunkten g_i überdecken. (Warum?) Definiere $f_i \in L^p(\mathbb{R})$ so, dass f_i auf $[-2R, 2R]$ mit g_i übereinstimmt. (Wähle für die letzten beiden Schritte nun R geeignet.)

l) Zeige abschließend, dass für jedes $f \in \mathcal{F}$ eines der f_i existiert mit $\|f - f_i\|_p \leq 3\varepsilon$ und vollende den Beweis des Satzes.

Lösung:

a) Satz von Lebesgue für $|f|^p \chi_{[-N,N]}$ mit $|f|^p$ als Majorante.

b) Für $\chi_{[a,b]}$ klar, Treppenfunktionen liegen dicht in L^p, Rest: siehe Aufgabenstellung.

c) $\mathcal{F}$ ist nach Voraussetzung relativkompakt und daher totalbeschränkt/präkompakt, lässt sich also mit einem ε-Netz überdecken.

d) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu jedem f_i gibt es ein R_i mit $\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p$ für alle $r > R_i$. R sei das Maximum dieser (endlich vielen) R_i. Zu $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein f_i im Abstand (p-Norm) kleiner ε. Nun ist $\|)\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-r,r]}f \leq \|f_i - f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|)\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-r,r]}f_i \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ für alle $r > R$, also ii) gezeigt.

e) Analoge Argumentation. $f_h = f(\cdot + h)$. Dann $\|f - f_h\|_p \leq \|f - f_i\| + \|f_i - (f_i)_h\| + \|(f_i)_h - f_h\| \leq 2\|f - f_i\| + \|f_i - (f_i)_h\|$, erster Summand klein durch Kugeln aus c), der zweite durch b) für die endlich vielen Kugelmittelpunkte. (Danach das δ aus der Konvergenzdefinition als Minimum der δ_i wählen.)

f) Hier und im Folgenden sei q stets so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$S_r f(x) = \frac{1}{r} \int_0^r f(x+s) \, \mathrm{d}s \leq \frac{1}{r} \int_0^r 1 |f(x+s)| \leq \frac{1}{r} \left(\int_0^r 1\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r f\right)^{\frac{1}{p}} \leq r^{-1+\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$. Diese Abschätzung gilt in jedem Punkt und damit erst recht für das Supremum.

g) $|(S_r f)(x) - (S_r f)(x+h)| = |\frac{1}{r} \int_0^r f(x+s) \, \mathrm{d}s - \frac{1}{r} \int_0^r f(x+h+s) \, \mathrm{d}s| = |\frac{1}{r} \int_0^r |f(x+s) - f(x+h+s)| \, \mathrm{d}s$. Die Ungleichung folgt mit genau derselben Abschätzung wie in f).

h) $|(f - S_r f)(x)| = |\frac{1}{r} \int_0^r f(x) - f(x+s) \, \mathrm{d}s| \leq r^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^r |f(x) - f(x+s)|^p \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$. Also

$$\int_{\mathbb{R}} |f - S_r f|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{r} \int_0^r |f(x) - f(x+s)|^p \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x = \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+s)|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s = \frac{1}{r} \int_0^r \|f - f_s\|^p \, \mathrm{d}s \leq \frac{r}{r} \sup_{0 \leq s \leq r} \|f - f_s\|$$

i)
- In metrischen Räumen ist Relativkompaktheit äquivalent zu Präkompaktheit.
- Das ist ii).
- Das ist iii).

j) Arzela-Ascoli. $[-2R, 2R]$ ist kompakt. Die Menge $S_r \mathcal{F}$ (r wie im letzten Punkt) ist punktweise beschränkt nach f) und i) und gleichgradig stetig mit g) und ii).

k) Überdeckung mit den Kugeln möglich, da nach j) relativkompakt: $(S_r \mathcal{F})|_{[T2R,2R]} \subset \bigcup_{i=1}^m B(g_i, \frac{\varepsilon}{4R}^{\frac{1}{p}})$, zu f gibt es also ein i mit $|S_r f(x) - g_i(x)| \leq (4R)^{-\frac{1}{p}} \varepsilon$ auf $[-2R, 2R]$.
f_i sei g_i auf $[-2R, 2R]$, null sonst. $R = \overline{R}$ ist eine gute Wahl.

l) Zu f sei i gewählt wie in k)

$$\begin{aligned}
\|f - f_i\| &\leq \|)\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-2\overline{R},2\overline{R}]} f + \|f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq \varepsilon + \|f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq \varepsilon + \|f - S_r f\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} + \|S_r f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \|S_r f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

(Einsetzen der Definition von f_i, ii), Dreiecksungleichung, iii) und die letzte Abschätzung aus k).)
Damit ist $\mathcal{F}$ enthalten in jeweils endlich vielen 3ε-Kugeln, also prä- und daher relativkompakt.