Michael Winkler
Johannes Lankeit

10. Juni 2015

10. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden" im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Definiert

$$u \mapsto \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2}$$

eine Norm auf $W^{1,2}(\Omega)$?

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachte $V = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega); \int_\Omega v \cdot \nabla\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$.
Zeige, dass es genau ein $u \in V$ gibt, sodass

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in V.$$

Ein derartiges u nennt man auch eine schwache Lösung der Stokes-Gleichung $-\Delta u + \nabla\pi = f$, $\nabla \cdot u = 0$ in Ω mit $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Worin unterscheidet sich diese Definition von Def. 5.1 für die schwachen Lösungen der Poisson-Gleichung?

Präsenzaufgabe 3:
Beweise (und lerne auswendig): Es sei H ein Hilbertraum, $b\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform und $F \in H^*$. Dann gibt es genau ein $u \in H$, sodass

$$b(u, v) = F(v) \qquad \text{für alle } v \in H.$$

Präsenzaufgabe 4:
Finde ein Beispiel für eine offene Menge, in der die Poincaré-Ungleichung nicht gilt.

Präsenzaufgabe 5:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$ und C_Ω die zugehörige Poincaré-Konstante.
a) Zu $R > 0$ betrachten wir das Gebiet

$$R\Omega = \{Rx;\ x \in \Omega\}.$$

Wie hängen die Poincaré-Konstanten C_Ω und $C_{R\Omega}$ zusammen?
b) Zu $R > 0$ betrachte die Lösung u_R des homogenen Dirichletproblems zu $-\Delta u = 1$ in $R\Omega$. Weise die Existenz einer Konstanten $C > 0$ nach, sodass für alle $R > 0$ die Abschätzung

$$\|u_R\|_{L^2} \le CR^{\frac{n}{2}+2}$$

erfüllt ist.

Hausübungen

Abgabe: 17. Juni 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:

Es seien Ω_1 und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ und C_{Ω_1} sowie C_{Ω_2} die zugehörigen (bestmöglichen) Poincaré-Konstanten. Gilt dann schon eine der folgenden Beziehungen? Falls ja: Welche?
$C_{\Omega_1} \geq C_{\Omega_2}$, $C_{\Omega_1} = C_{\Omega_2}$, $C_{\Omega_1} \leq C_{\Omega_2}$

Hausaufgabe 2:

Es seien $R_2 > R_1 > 0$ und $\Omega = B_{R_2} \setminus B_{R_1} \subset \mathbb{R}^2$. Leite eine Abschätzung für die Poincaré-Konstante in Ω her, die nicht vom Gebietsdurchmesser, sondern von $R_2 - R_1$ abhängt.

Hausaufgabe 3:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet. Zeige, dass es zu jedem $p \geq 1$ eine Konstante $C(p) > 0$ gibt, sodass für jede Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt, dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hausaufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^3(\Omega)$ sowie $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Finde eine schwache Formulierung für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + b \cdot \nabla u + g &= f \quad \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

und weise für hinreichend kleine $\|b\|_{L^\infty(\Omega)}$ die Existenz einer Lösung nach.