Michael Winkler
Johannes Lankeit

17. Juni 2015

11. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: Für hinreichend kleines Zahlen $c > 0$ hat das Problem

$$-\Delta u = \frac{c}{1+u^2} \quad \text{in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

eine eindeutige schwache Lösung.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet und $a \in C^2(\overline{\Omega})$ positiv und $f \in L^2(\Omega)$ erfülle $\int_\Omega f = 0$. Finde eine schwache Formulierung für das homogene Neumann-Randwertproblem

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Zeige, dass jene schwache Formulierung für hinreichend reguläre Funktionen zu (1) äquivalent ist.
Weise die Existenz einer Lösung nach. Ist sie eindeutig?

Präsenzaufgabe 3:
Finde schwache Formulierungen für Dirichlet- und Neumannproblem zur Poissongleichung mit anderen Randwerten als 0.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $A \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n\times n})$ und es gebe $c > 0$ mit $\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq c|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega f = 0$. Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = f.$$

Welche Forderung an die Randwerte der Normalenableitung böte sich hier (analog zu, aber nicht identisch mit) (1) sehr an? Weise die Existenz einer schwachen Lösung nach. Unter welcher Zusatzannahme wird sie eindeutig?

Hausübungen

Abgabe: 24. Juni 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glatt berandetes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, &\quad \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

und gib eine Definition für schwache Lösungen an. Zeige ihre Existenz und Eindeutigkeit.
Hinweis: Für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist $\int_\Omega (\Delta u)^2 = \int_\Omega |D^2 u|^2$.

Hausaufgabe 2:
Bestimme alle schwachen Lösungen von

$$-\Delta u = 42, \qquad \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

in $\Omega = B_{2070}(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Hausaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet und $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$ so, dass $\overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N = \partial\Omega$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Es sei ferner $\emptyset \neq \Gamma_D \subset \partial\Omega$ relativ offen. Gegeben seien $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in C^0(\overline{\Gamma}_N)$. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \partial_\nu u &= g && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir definieren zudem

$$V := \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega});\ \varphi\big|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Multipliziere die Gleichung mit einer Testfunktion $\varphi \in V$ und leite dadurch eine schwache Formulierung von (2) her. Finde einen geeigneten Hilbertraum H und weise die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in H$ nach. Verwende dabei, falls nötig, die folgende Variante der Poincaré-Ungleichung[1]:
Es gibt $C > 0$, sodass für alle $v \in \overline{V}^{W^{1,2}(\Omega)}$ gilt: $\|v\|_{L^2} \leq C\|\nabla v\|_{L^2}$.

Hausaufgabe 4:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.
Zeige: Es gibt eine Zahl $\mu_0 > 0$, sodass das Problem

$$-\Delta u = \mu u^2 e^{-|u|} \qquad \text{in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

für jedes $\mu \in (0, \mu_0)$ eine eindeutige schwache Lösung aufweist.
Findest du für $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ einen möglichen konkreten Wert für μ_0?

[1] Ihren Beweis heben wir uns für später auf.