Michael Winkler
Johannes Lankeit

24. Juni 2015

12. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $p \in [1,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet und $M \subset W^{1,p}(\Omega)$ derart, dass

- $u \in M, \lambda \in (0,\infty) \implies \lambda u \in M$
- $u \in M, \nabla u = 0 \implies u = 0.$

Zeige unter Zuhilfenahme von (1), dass $C > 0$ existiert, sodass für alle $u \in M$ gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Folgere bereits bekannte Poincaré-Ungleichungen.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow\hookrightarrow Z$. Zeige, dass dann $X \hookrightarrow\hookrightarrow Z$.
Es sei $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Dann gilt[1] $W^{1,p}(\Omega_1) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega_2)$.
Zeige, dass für beschränkte, glatt berandete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \tag{1}$$

kompakt ist.

Präsenzaufgabe 3:
Beweise: Für alle $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ gilt $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|\varphi_x\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Präsenzaufgabe 4:
Seien $n \ge 1$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $|x_k| \to \infty$ für $k \to \infty$. Zeige, dass durch

$$f_k(x) := (1 - |x - x_k|^2)_+, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

eine in $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ beschränkte Folge definiert wird, die nicht stark in $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

[1] Für einen Beweis siehe z.B. Evans: Partial Differential Equations, S. 268.

Hausübungen

Abgabe: 1. Juli 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:

a) Es sei $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, $Y \hookrightarrow Z$. Zeige, dass dann $X \hookrightarrow\hookrightarrow Z$.

b) Es sei $X \overset{J}{\hookrightarrow} Y$. Zeige, dass $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ genau dann gilt, wenn $JB_1(0)$ präkompakt ist.

Hausaufgabe 2:

Es sei $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. Zeige: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $C_\varepsilon > 0$, sodass für alle $u \in X$

$$\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Z$$

gilt.

Hausaufgabe 3:

Es sei $(u_j)_j$ eine Folge linear unabhängiger Funktionen $u_j \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$\Delta u_j + \lambda u_j = 0, \qquad u_j\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \|u_j\|_{L^2} = 1.$$

Zeige: Dann kann es keine Schranke C geben, mit der für alle $j \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\lambda_j < C$$

gelten würde.

Hausaufgabe 4:

Beweise oder widerlege: Der Rellich'sche Einbettungssatz gilt auch in allen unbeschränkten Gebieten.

Hausaufgabe 5:

Betrachte nochmals das Kolmogorov'sche Kompaktheitskriterium von Übungsblatt 9. Was muss man am dortigen Beweis ändern, um Satz 6.2 bewiesen zu haben?[2]

Wie lässt sich das Kriterium für beschränkte Gebiete vereinfachen?

Hausaufgabe 6:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und A wie in Bsp. 3.8, also $K\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig mit $K(x,y) = K(y,x)$ und

$$Au(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \qquad x \in \Omega, u \in L^2(\Omega).$$

Ist A kompakt (vgl. Def. 6.3)?

[2] Ein kurzer Hinweis genügt, der Beweis muss nicht nochmal abgeschrieben werden.