Michael Winkler
Johannes Lankeit

1. Juli 2015

13. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei X ein normierter Raum und $(x_j)_j \subset X, x \in X$ mit $x_j \to x$ in X. Zeige, dass dann auch $x_j \rightharpoonup x$.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei X ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge und $x \in X$.
Zeige: Ist $M \subset X^*$ eine dichte Teilmenge des Dualraums von X und gilt für jedes $y \in M$

$$\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle \qquad \text{für } n \to \infty,$$

so gilt $x_n \rightharpoonup x$ in X.

Präsenzaufgabe 3:
Untersuche die durch

$$u_n(x) := \sqrt{n}e^{-nx}$$

sowie die durch

$$v_n(x) = ne^{-2nx}$$

definierte Funktionenfolgen in $L^2((0,1))$ auf Beschränktheit, punktweise Konvergenz, Konvergenz im Sinne der Norm und schwache Konvergenz.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega)$.
Beweise oder widerlege, dass dann $\langle u_n, v_n \rangle \to \langle u, v \rangle$.

Präsenzaufgabe 5:
Zeige: In endlichdimensionalen normierten Räumen sind starke und schwache Konvergenz äquivalent.

Hausübungen

Abgabe: 8. Juli 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$i.)\ u_n(x) = \sin(n\pi x), \quad ii.)\ u_n(x) = \sin(n/x), \quad iii.)\ u_n(x) = \sin(1/nx).$$

Untersuche die vorgelegten Funktionenfolgen auf schwache Konvergenz in $L^2(0,1)$.

Hausaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_j)_j \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u_j \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ für $j \to \infty$.
Beweise: Dann gilt $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(\Omega)$.

Hausaufgabe 3:
Gegeben sei durch

$$x_n = (\underbrace{\frac{1}{\ln(1+n)}, \ldots, \frac{1}{\ln(1+n)}}_{n+1 \text{ Stellen}}, 0, 0, 0, \ldots), \qquad n \in \mathbb{N}$$

eine Folge in ℓ^2. Zeige: Diese Folge strebt komponentenweise, aber nicht schwach gegen 0.

Hausaufgabe 4:
Betrachte die Folge der e_n (von Übungsblatt 1) und untersuche sie auf schwache Konvergenz in
a) ℓ^1
b) $\ell^{\frac{3}{2}}$.

Hausaufgabe 5:
Es sei X ein normierter Raum und $A\colon X \to X$ eine stetige lineare Abbildung.
Zeige: Dann folgt aus $x_j \rightharpoonup x$, dass auch $Ax_j \rightharpoonup Ax$. Kann man auf die Voraussetzung der Linearität von A verzichten?

Hausaufgabe 6:
Eine Menge $M \subset X$ in einem Hilbertraum X heiße „schwach abgeschlossen“[1], wenn für alle $x \in X$, die schwacher Grenzwert einer Folge $(x_j)_j \subset M$ sind, bereits $x \in M$ gilt.
Welche der folgenden Implikationen gilt/gelten? (Gib je einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.):

$$\begin{aligned} M \text{ schwach abgeschlossen} &\implies M \text{ abgeschlossen (d.h. „stark“ abgeschlossen, also im Sinne der Norm-Topologie)} \\ M \text{ abgeschlossen} &\implies M \text{ schwach abgeschlossen.} \end{aligned}$$

[1] Präziser wäre: schwach Folgen-abgeschlossen.