Michael Winkler
Johannes Lankeit

8. Juli 2015

14. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachte das Funktional

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

und zeige, dass es ein Minimum annimmt. Welche Gleichung löst der Minimierer?

Präsenzaufgabe 2:
Beweise Lemma 8.5: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\Psi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $\Psi(0) = 0$. Dann gehört für jedes $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ auch $\Psi(u) := \Psi \circ u$ zu $W_0^{1,2}(\Omega)$ und für die zugehörige schwache Ableitung gilt die Kettenregel

$$\nabla\Psi(u) = \Psi'(u)\nabla u \qquad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $p_0 \in [2, \frac{2n}{n-2})$. Weiter sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Eigenfunktion zu $\lambda \in \mathbb{R}$ von $-\Delta$ in Ω.
a) Zeige, dass $u \in L^{p_0}(\Omega)$.
b) Es sei $u \in L^p(\Omega)$ für ein $p \geq 1$. Nimm an, in (8.1.1) wäre die Wahl von $\varphi = u^{p-1}$ möglich.
Zeige, dass dann $u \in L^{p\frac{p_0}{2}}(\Omega)$.

Präsenzaufgabe 4:
Es seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$ bezeichne Af die schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass die dadurch definierte Abbildung $A: \ L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ linear und *vollstetig* ist, d.h., dass aus $f_k \rightharpoonup f$ in $L^2(\Omega)$ folgt, dass $Af_k \to Af$ in $L^2(\Omega)$ gilt.

Hausübungen

Abgabe: 15. Juli 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:

a) Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Für ein festes $x_\star \in \Omega$ sei ferner $\Omega_\star := \Omega \setminus \{x_\star\}$. Zeige, dass

$$W_0^{1,2}(\Omega_\star) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

im Sinne einer Gleichheit von Funktionen f. ü. in Ω gilt.

[Tipp: OBdA sei $x_\star = 0 \in \Omega$. Um zu zeigen, dass $C_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega_\star)$ gilt, sei $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $\varphi_\varepsilon := \chi_\varepsilon \cdot \varphi$ für $\varepsilon > 0$ mit χ_ε wie folgt: $\chi \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi \leq 1$, $0 \leq \chi' \leq 2$, $\chi \equiv 0$ auf $(-\infty, 1)$, $\chi \equiv 1$ auf $(2, \infty)$ und $\chi_\varepsilon(z) = \chi(\frac{z}{\varepsilon})$. Beweise, dass $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ beschränkt in $W_0^{1,2}(\Omega_\star)$ ist, und wähle eine Folge von Zahlen $\varepsilon = \varepsilon_k \searrow 0$ mit $\varphi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup z$ in $W_0^{1,2}(\Omega_\star)$ und $\varphi_{\varepsilon_k} \to z$ in $L^2(\Omega_\star)$ für $k \to \infty$. Begründe, warum $z = \varphi$ sein muss.]

b) Finde beschränkte Gebiete $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subsetneq \Omega_1$ derart, dass $\lambda_1(\Omega_1) = \lambda_1(\Omega_2)$.

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$, $0 \leq c \in L^\infty(\Omega)$. Betrachte

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega cu^2 - \int_\Omega fu, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

a) Zeige: Dieses Funktional nimmt ein Minimum an.
b) Zeige, dass für diesen Minimierer u_*, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$J(u_*) \leq J(u_* + \varepsilon\varphi)$$

und finde anhand dessen (und eines Grenzübergangs $\varepsilon \to 0$) ein Randwertproblem, das u_* im schwachen Sinne löst.
c) Ist der Minimierer eindeutig?

Hausaufgabe 3:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeige, dass dann auch $u_+ := \max\{u, 0\}$, $u_- := \max\{-u, 0\}$ und $|u|$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ liegen und bestimme ihre schwachen Ableitungen.
Tipp: Es genügt, den Beweis für $|u|$ zu führen. (Warum?)
Für diesen Beweis approximiere den Betrag mit Hilfe von Funktionen $\Psi_j(\xi) := \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{j}} - \frac{1}{\sqrt{j}}$ und finde und nutze in geeignetem Sinne konvergente Teilfolgen von $\Psi_j \circ u$.

Hausaufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Eigenfunktion zu $\lambda \in \mathbb{R}$ von $-\Delta$ in Ω. Zeige: Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist $u \in L^p(\Omega)$.
Verwende dazu eine der Präsenzaufgaben.
Um die dort getroffene Wahl von φ zu rechtfertigen, betrachte $\Psi_j \circ u$ für Funktionen $\Psi_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Psi_j(s) := \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ s^{p-1}, & 0 < s < j \\ j^{p-1}, & j \leq s. \end{cases}$$