Michael Winkler
Johannes Lankeit

15. Juli 2015

15. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Es bezeichne $\lambda_1 := \min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} J(u)$, $J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$, den ersten Eigenwert von $-\Delta$ in Ω und $\Theta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ eine zugehörige nichtnegative Eigenfunktion mit $\int_\Omega \Theta^2 = 1$. Dann gilt[1]:

0. Ist u eine nichtnegative schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ, so ist u auch eine klassische Eigenfunktion, und es gilt $u > 0$ in Ω.

Zeige:

1. Ist u eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 mit $\int_\Omega u^2 = 1$ und $u \not\equiv \Theta$, so gilt $J(\Theta - u) = \lambda_1$.
2. Ist u wie in b), so ist $(\Theta - u)_+$ eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1.
3. Ist u eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1, so gibt es $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $u = \beta\Theta$. In diesem Sinne ist also λ_1 ein „einfacher Eigenwert“ von $-\Delta$.

Präsenzaufgabe 2:
Bestimme Zahlen $a_j \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = x^2$ sich als

$$f = \sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(j\pi\cdot) \in L^2((0,1))$$

darstellen lässt.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $p \in [2, \frac{2n}{n-2})$. Zeige, dass das Funktional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

nicht nach unten beschränkt ist.
Setze $\beta > 0$ fest und zeige, dass es auf der Menge $\Sigma_\beta = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \int_\Omega |u|^p = \beta\}$ ein Minimum annimmt. Für welche Gleichung ist der Minimierer eine schwache Lösung?

Hausübungen

Abgabe: Tag des heiligen Nimmerlein, Mitternacht

Hausaufgabe 1:
Bestimme eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = 1 - x^2, & x \in \Omega \end{cases}$$

in $\Omega = (-1,1)$.

[1] Wir haben auf dem letzten Blatt bereits gesehen, dass $\Theta \in L^p(\Omega)$ für jedes $p \in [1,\infty)$. Man kann, beispielsweise unter Zuhilfenahme sogenannter „A-priori-Abschätzungen für Lösungen der Poisson-Gleichung“, noch bessere Regularitätsaussagen gewinnen ($\Theta \in C^2(\Omega)$) und erhält Positivität aus dem sogenannten „Maximumprinzip“ (nähere Informationen bietet die Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“).