Michael Winkler
Johannes Lankeit

8. April 2015

1. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: In normierten Räumen ist $\{x; \|x\| < 1\}$ offen und $\{x; \|x\| \le 1\}$ abgeschlossen und beschränkt.

Präsenzaufgabe 2:
Beweise oder widerlege: Normen sind lineare Abbildungen.

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: Für $p \in [1,\infty]$ ist ℓ^p ein Banachraum.

Präsenzaufgabe 4:
Zeige: Für $p < 1$ ist ℓ^p kein Banachraum.

Präsenzaufgabe 5:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei e_n die durch $e_{n,n} = 1$ und $e_{n,k} = 0$, falls $k \neq n$, definierte Folge.
(Was entspricht diesen Folgen im $\mathbb{R}^N$?)
Bestimme $\|e_n\|_{\ell^p}$ für $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$.
Betrachte nun die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (der gerade betrachteten Folgen) in ℓ^p für $p \in [1,\infty]$. Ist sie eine Nullfolge? Eine Cauchyfolge? Enthält sie konvergente Teilfolgen? Ist sie beschränkt?

Präsenzaufgabe 6:
Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeige, dass $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Präsenzaufgabe 7:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1,\infty]$.
Gib je ein Beispiel für eine offene, für eine abgeschlossene und für eine kompakte Menge in $L^p(\Omega)$ an.

Präsenzaufgabe 8:
Es sei $p \in [1,\infty)$. Betrachte den Vektorraum $V = \ell^p$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Zeige: V ist kein Banachraum.

Hausübungen

Abgabe: 15. April 2015, 7:15 Uhr

Wegen §6 (4) der Prüfungsordnung zählen die Hausübungen dieses Blattes noch nicht zu den zum Bestehen des Moduls zu erbringenden Teilleistungen.
Für die übrigen Hausübungen gilt: Alle Übungszettel (bis auf zwei) sind abzugeben, insgesamt müssen in den Hausübungen mindestens 20 Punkte erreicht werden.

Hausaufgabe 1:
Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $|||\cdot|||$ eine weitere Norm darauf.
Beweise oder widerlege: $|||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$ ist dann zwangsläufig stetig.

Hausaufgabe 2:
Zeige: $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^2((0,1))})$ ist ein normierter Raum, aber kein Banachraum.

Hausaufgabe 3:
Zeige, dass in ℓ^p ($p \in [1,\infty]$) nicht jede abgeschlossene beschränkte Menge folgenkompakt ist.

Hausaufgabe 4:

a) Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Gegeben seien $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $t \in (0,1)$. Beweise oder widerlege: Dann gilt bereits $\|x + t(y-x)\| < 1$. (Was bedeutet diese Aussage geometrisch?)

b) Es sei X ein normierter Vektorraum. Gegeben seien $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $t \in (0,1)$. Beweise oder widerlege: Dann gilt bereits $\|x + t(y-x)\| < 1$.

c) Für welche $p \in [1,\infty]$ gilt die Aussage aus a) und b) in ℓ^p?

Hausaufgabe 5:
Zeige: $M \subset c_0$ ist genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist
und $\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in M} \sup_{k>j} |x_k| = 0$.

Hausaufgabe 6:

a) Es sei $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum des normierten Vektorraums V. Zeige: U ist abgeschlossen.

b) Gib ein Beispiel für einen normierten Vektorraum und einen nicht abgeschlossenen Unterraum an.

Hausaufgabe 7:
Beweise den Satz von Arzelà-Ascoli:
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, X ein Banachraum[1] und $\mathcal{F}$ eine Menge stetiger Funktionen $f\colon K \to X$.
Dann ist $\overline{\mathcal{F}} \subset C^0(K, X)$ genau dann kompakt, wenn für jedes $x \in K$

$$\overline{\{f(x); f \in \mathcal{F}\}} \subset X \quad \text{kompakt ist}$$

und $\mathcal{F}$ gleichgradig gleichmäßig stetig ist, d.h.:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, f \in \mathcal{F}\; \forall\, x, y \in K : \|x - y\| \le \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon.$$

Gib für den Fall $X = \mathbb{R}$ eine einfachere Formulierung für die erste der beiden Bedingungen an.

Hausaufgabe 8:
Betrachte die Menge

$$X = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}); \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le 2070\}.$$

Ist X kompakt (als Teilmenge von $L^{5692}((0,1))$)?

Hausaufgabe 9:
Melde dich in Paul auch für die Übung zur Vorlesung an (sofern du vorhast, sie jemals zu besuchen).

[1] Ein vollständiger metrischer Raum X anstelle eines Banachraums X wäre auch genug.