Michael Winkler
Johannes Lankeit

15. April 2015

2. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1, \infty]$.
Gib je ein Beispiel für eine offene, für eine abgeschlossene und für eine kompakte Menge in $L^p(\Omega)$ an.

Präsenzaufgabe 2:
Untersuche, ob M als Teilmenge des normierten Raums X offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, relativ kompakt[1], ein Untervektorraum ist, wobei

a) $X = c_0$, $M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ -\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$,

b) $X = \ell^p$, $p \in [1, \infty)$ $M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p;\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$,

c) $X = L^p((0, 1))$, $p \in [1, \infty]$, $M = \{f \in L^p((0, 1)) \cap L^2((0, 1)); \|f\|_{L^2} < 1\}$,

d) $X = C^0([0, 1])$, $M = \{f \in C^0([0, 1]); f$ ist nichtnegativ und hat genau eine Nullstelle$\}$.

Präsenzaufgabe 3:
Bestimme den Abschluss von c_0 in ℓ^∞ sowie den Abschluss von ℓ^p in ℓ^∞ für $p \in [1, \infty)$.

Präsenzaufgabe 4:
Was haben die folgenden Konvergenz-Arten miteinander zu tun, welche Implikationen gelten?

- Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_{L^{p_1}}$,
- bzgl. $\|\cdot\|_{L^{p_2}}$ für $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$,
- Konvergenz „punktweise fast überall“,
- gleichmäßige Konvergenz;

a) auf beschränktem Gebiet,

b) auf einem Gebiet mit unendlichem Maß?

[1] also ihr Abschluss kompakt

Hausübungen

Abgabe: 22. April 2015, 7:30 Uhr

Hausaufgabe 1:

Untersuche, ob M als Teilmenge des normierten Raums X offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, relativ kompakt, ein Untervektorraum ist, wobei

a) $X = C^0((0,1))$, $M = \{f \in C^0((0,1);\mathbb{R}); f$ ist stetig und konvex und es gilt $-42 \leq f \leq 42\} =: M_{a)}$,

b) $X = L^p((0,1))$, $p \in [1,\infty]$, $M = \{f \in L^p((0,1);\mathbb{R}); f$ ist stetig und konvex[2] und es gilt (f.ü.) $-42 \leq f \leq 42\}$,

c) $X = L^p((0,\infty))$, $p \in [1,\infty)$, $M = \{f \in L^p((0,\infty)) \cap L^1((0,\infty)); \int_0^\infty f = 0\}$,

d) $X = C^0([0,1])$, $M = \{u \in C^0([0,1]) \cap C^1((0,1));\ -1 < u(0) < 1, -20 < u'(x) < 70$ für $x \in [0,1]\}$,

e) $X = C^0((0,1))$, $M = \{g \in X;$ Es gibt $f \in M_{a)}$, sodass $g(x) = \int_0^x f(s)ds$ für alle $x \in (0,1)\}$.

Hausaufgabe 2:

Es sei V ein normierter Raum und $B \subset V$ eine offene Kugel. Finde alle Unterräume $U \subset V$, sodass
a) $U \subset B$,
b) $U \supset B$.

Hausaufgabe 3:

Es sei V ein unendlich-dimensionaler normierter Raum und $\delta > 0$. Zeige: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n - x_m\| > 1 - \delta$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 4:

Es sei V ein normierter Raum und $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Zeige, dass es zu jedem $x \in V$ ein $u_0 \in U$ gibt mit

$$\|x - u_0\| = d(x, U) := \inf\{\|x - u\|; u \in U\}.$$

Ist diese „Projektion von x auf U" eindeutig?
Welcher Schritt deines Beweises lässt sich nicht ohne Weiteres auf die Situation unendlichdimensionaler Unterräume übertragen?

Hausaufgabe 5:

Finde eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass für $p \in [1,\infty)$ stets $\|f_n\|_{L^p} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, aber $\|f_n\|_{L^\infty} \not\to 0$.

[2] $f \in L^p$ heiße dabei stetig/konvex/…, wenn es $g \in f$ gibt, sodass g diese Eigenschaft hat (bzw. wenn f fast überall mit einer Funktion mit dieser Eigenschaft übereinstimmt).