Michael Winkler
Johannes Lankeit

22. April 2015

3. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $u(x,y) = x^5 y^3$, $(x,y) \in (0,1)^2$. Was ist $D^\alpha u$ für $\alpha = (2,3)$?

Präsenzaufgabe 2:
Gehört die durch $u(x) = 1$, $x \in \Omega$, definierte Funktion zu $W^{1,2}(\Omega)$, falls $\Omega = \mathbb{R}$ bzw. falls $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$?

Präsenzaufgabe 3:
Bestimme die schwache Ableitung der Funktion

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \end{cases}$$

in $\Omega = (0,2)$.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in C_0^1(\Omega)$. Zeige, dass $uv \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

Präsenzaufgabe 5:
Zeige, dass die Funktion

$$v(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \\ 42, & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \end{cases}$$

eine schwache Ableitung von $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ in $\Omega = (0,1)$ ist.

Präsenzaufgabe 6:
Für ein Intervall I sei $u \in W^{1,p}(I)$. Zeige, dass für fast alle x_1, x_2 gilt $u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(s)ds$.

Hausübungen

Abgabe: 29. April 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
Es sei $J\colon X \to Y$ eine Isometrie zwischen den normierten Räumen X und Y. Zeige: J ist stetig und injektiv.

Hausaufgabe 2:
Es sei $1 \le p < \infty$, $m > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| + |\beta| \le m$ sowie $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Zeige, dass $D^\alpha D^\beta u = D^\beta D^\alpha u$.

Hausaufgabe 3:
Gilt für die durch $u(x) = 1 - |x|$ gegebene Funktion, dass $u \in W_0^{1,2}((-1,1))$?

Hausaufgabe 4:

Es sei $(f_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ derart, dass $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ und $Df_n \to g$ in $L^p(\Omega)$. Zeige, dass $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $Df = g$.

Hausaufgabe 5:

Gegeben sei ein beschränktes Intervall $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty)$.

a) Es sei $f \in L^1(I)$ mit $\int_I f\varphi' = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Zeige, dass es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f = C$ f.ü.
Hinweis: Es sei $\psi \in C_0^\infty(I)$ mit $\int \psi = 1$. Zu $w \in C_0^\infty(I)$ setze $\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi$ ein, um $\int w(f - \int f\psi)$ für alle $w \in C_0^\infty(I)$ zu erhalten.

b) Es sei $g \in L^1(I)$, $y_0 \in I$ und $v(x) := \int_{y_0}^x g(t)dt$. Zeige, dass es dann $v \in C^0(I)$ gibt mit $\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi$ für alle $\varphi \in C_0^1(I)$.
Tipp: Nutze in den Integralen auf der rechten Seite von $\int v\varphi' = -\int_a^{y_0}\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dtdx + \int_{y_0}^b \int_{y_0}^x g(t)\varphi(x)dtdx$ den Satz von Fubini.

c) Es sei $u \in L^p(I)$ und u habe eine schwache Ableitung $u' \in L^p(I)$. Zeige, dass es dann eine stetige Funktion $\overline{u}$ gibt, sodass $u = \overline{u}$ f.ü. und $\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt$.

d) Zeige, dass die Funktion u aus c) zu $W^{1,p}(I)$ gehört.
Approximiere dazu u' in $L^p(I)$ durch glatte Funktionen v_n und betrachte $u_n(x) := \overline{u}(y_0) + \int_{y_0}^x v_n(s)ds$.

Hausaufgabe 6:

Zeige, dass für $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$ die Abschlüsse bezüglich $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ von $C^1(\Omega)$ und $C^1(\overline{\Omega})$ nicht übereinstimmen.