Michael Winkler
Johannes Lankeit

29. April 2015

4. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Skizziere, sofern möglich, im $\mathbb{R}^2$ Einheitsvektoren u, v mit

$$\text{a)}\ \langle u,v\rangle = 1, \quad \text{b)}\ \langle u,v\rangle = \frac{1}{3}, \quad \text{c)}\ \langle u,v\rangle = -\frac{1}{2}, \quad \text{d)}\ \langle u,v\rangle = -2 \quad \text{e)}\ \langle u,v\rangle = 0.$$

Präsenzaufgabe 2:
Berechne (für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2$) $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ sowie $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5+6i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2i \end{pmatrix} \rangle$.

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: In einem $\mathbb{R}$-Hilbertraum gilt

$$\langle x,y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Welche der beiden Implikationen gilt in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum?

Präsenzaufgabe 4:
Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Für die Vektoren $x, y \in V$ gelte $\langle x,t\rangle = \langle y,t\rangle$ für alle $t \in V$.
Zeige: $x = y$.

Präsenzaufgabe 5:
a) Zeige, dass auf $C^0([0,1])$ durch $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt definiert wird. Bestimme bezüglich dieses Skalarprodukts den Winkel zwischen $f(x) = 1, x \in [0,1]$ und $g(x) = x, x \in [0,1]$.
b) Zeige, dass für $f, g \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\int_0^1 fg \le \sqrt{\int_0^1 f^2 \int_0^1 g^2}$$

gilt.

Präsenzaufgabe 6:
Definiert $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n (\mathrm{Re}(x_i)\mathrm{Re}(y_i) + \mathrm{Im}(x_i)\mathrm{Im}(y_i))$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$?

Präsenzaufgabe 7:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| > 0$. Zeige, dass $L^p(\Omega)$ für $p \neq 2$ kein Hilbertraum ist.

Präsenzaufgabe 8:
$(X, \|\cdot\|)$ sei ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt. Zeige, dass

$$\langle x,y\rangle = \|\frac{x+y}{2}\| - \|\frac{x-y}{2}\| = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

ein Skalarprodukt definiert. Zeige dazu zunächst, dass $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, $\langle -u,v\rangle = -\langle u,v\rangle$.
Zeige dann $\langle u+w,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle$. (Wende die Parallelogrammgleichung auf u, v; auf $u+w, v+w$ und auf $u+v+w, w$ an, um einen einfacheren Ausdruck für $\|u+v+w\|^2$ zu erhalten.)
Zeige schließlich, dass $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ (zunächst für $\lambda \in \mathbb{N}$, dann $\lambda \in \mathbb{Q}$, dann $\lambda \in \mathbb{R}$).

Hausübungen

Abgabe: 6. Mai 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei ein $\mathbb{C}$-Prähilbertraum. Für alle $x, y, z \in V$ zeige die Apollonios-Gleichung

$$\frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \tfrac{1}{2}(x+y)\|^2 = \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2.$$

Hausaufgabe 2:

Gegeben sei eine stetige Funktion $\mu\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$. Betrachte $X := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mu(x)dx < \infty\}$ und zeige, dass für $f, g \in X$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mu(x)dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mu(x)dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt.

Hausaufgabe 3:

Es sei H ein Hilbertraum und $x \in H$ mit $\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \ge 0$ für alle $y \in H$.
Beweise oder widerlege: Dann ist bereits $x = 0$.

Hausaufgabe 4:

a) Es sei H ein Hilbertraum. Zeige, dass für $x, y \in H$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ und $t \in (0,1)$ stets gilt $\|x + t(y-x)\| < 1$.
Was bedeutet das geometrisch?
b) Es sei H ein Hilbertraum. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass alle $x, y \in H$ mit $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$, $\|x-y\| \ge \varepsilon$ bereits $\|\frac{x+y}{2}\| \le 1-\delta$ erfüllen.

Hausaufgabe 5:

H sei ein Hilbertraum, $\|\cdot\|$ sei eine Norm auf H.
Beweise oder widerlege, dass unter diesen Umständen $\|\cdot\|$ in jedem Fall von einem Skalarprodukt induziert wird.

Hausaufgabe 6:

Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Hilbertraum H und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, sodass

$$\langle t_n u_n - t_m u_m, u_n - u_m\rangle \le 0 \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

1. Nimm an, dass $(t_n)_n$ monoton nichtfallend ist. Zeige, dass (u_n) konvergiert. (Hinweis: Zeige, dass $(|u_n|)$ nicht wächst.)
2. Nimm nun an, dass $(t_n)_n$ nicht wächst. Zeige, dass dann entweder $|u_n| \to \infty$ oder (u_n) konvergiert.
3. Falls $t_n \to t > 0$, zeige, dass (u_n) konvergiert; und falls $t_n \to 0$, zeige, dass sowohl 1. als auch 2. auftreten können.

Tipp: $2\langle t_n u_n - t_m u_m, u_n - u_m\rangle = (t_n + t_m)\|u_n - u_m\|^2 + (t_n - t_m)(\|u_n\|^2 - \|u_m\|^2)$.