Michael Winkler
Johannes Lankeit

6. Mai 2015

5. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Orthonormalisiere in $L^2(\mathbb{R})$ mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren die Funktionen $e^{-\frac{t^2}{2}}, te^{-\frac{t^2}{2}}, t^2e^{-\frac{t^2}{2}}, t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$ und erhalte so die ersten der sogenannten Hermiteschen Funktionen.

Präsenzaufgabe 2:
Finde ein Beispiel für ein unendliches Orthonormalsystem, das nicht vollständig ist.

Präsenzaufgabe 3:
W sei ein Unterraum des Innenproduktraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $x \in V$. Zeige: $x \in W^\perp$ genau dann, wenn für alle $w \in W$ gilt, dass $\|x\| \leq \|w - x\|$.

Präsenzaufgabe 4:
Skizziere im $\mathbb{R}^2$ die Menge $M_i^\perp$ für $M_1 = \{(1,2)\}$, $M_2 = \mathbb{R}\times\{0\}$, $M_3 = \{(42,1),(3,\pi)\}$, $M_4 = \{(0,0)\}$, $M_5 = \mathbb{R}\times\{1\}$.

Präsenzaufgabe 5:
Es sei $M_1 \subset M_2$. Zeige, dass dann $M_1^\perp \supset M_2^\perp$.

Präsenzaufgabe 6:
a) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ und $T\colon V \to V$ eine symmetrische $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $\langle Tv, v\rangle = 0$ für jedes $v \in V$. Zeige, dass $T = 0$.
b) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{C}$ und $T\colon V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\langle Tv, v\rangle = 0$ für jedes $v \in V$. Zeige, dass $T = 0$.
c) Finde eine $\mathbb{R}$-lineare, von 0 verschiedene Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\langle Tv, v\rangle = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 7:
Es sei $M \subset H$ eine Menge, deren lineare Hülle im Hilbertraum H dicht liege. Zeige: Ist $x \perp M$, so ist $x = 0$.

Präsenzaufgabe 8:
Es sei $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ ein ONS im $\mathbb{C}$-Hilbertraum H und $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Finde eine hinreichende und notwendige Bedingung an $(\lambda_k)_k$, sodass A symmetrisch ist, wenn A die durch

$$Av := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle v, e_k\rangle e_k$$

gegebene Abbildung bezeichnet.

Präsenzaufgabe 9:
Beweise: Ein normierter Raum ist genau dann ein Innenproduktraum, wenn jeder seiner zweidimensionalen Unterräume es ist.

Hausübungen

Abgabe: 13. Mai 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
Wende das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Polynome $1, x, x^2, x^3, x^4$ bezüglich des gewichteten Innenprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

an.

Hausaufgabe 2:
Es sei $M \subset H$ eine Teilmenge eines Hilbertraums. Zeige $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$. Gilt auch $M = M^{\perp\perp}$?

Hausaufgabe 3:
Es sei $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ein ONS im HR $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Zeige, dass für $x \in H$ dann

$$\lim_{k\to\infty} \langle x, e_k\rangle = 0.$$

Zeige, dass für $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$\lim_{|k|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = 0.$$

Hausaufgabe 4:
Es sei $S \subset H$ ein (überabzählbares) Orthonormalsystem in dem Hilbertraum H und $x \in H$.
Zeige, dass $M = \{e \in S; \langle x, e\rangle \neq 0\}$ (höchstens) abzählbar ist.

Hausaufgabe 5:
Es sei $\mathcal{S}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H und es seien $x, y \in H$. Zeige, dass

$$\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle\langle e, y\rangle| < \infty.$$

(Begründe insbesondere auch, warum die linke Seite einen sinnvollen Ausdruck bildet.)

Hausaufgabe 6:
Es bezeichne $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n(x^2-1)^n$ das n-te Legendrepolynom. Zeige für $x \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$:

a) $P_n(1) = 1$,
b) $P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x(x^2-1)^n)$,
c) $P'_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) + P'_{n-1}(x)$,
d) $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$,
e) $nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)$,
f) $(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$ (nutze d) mit $n-1$ statt n und eliminiere P'_{n-1} mit Hilfe von e)),
g) $Q_n(x) := \frac{d}{dx}((1-x^2)P'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$ (differenziere f) und benutze e)),
h) Für $n \neq m$ sind P_n und P_m orthogonal in $L^2((-1, 1))$ (betrachte $Q_nP_m - Q_mP_n$ und integriere partiell)
i) $R_n(x) := (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(1) = 0$ (verwende c,e,a),
j) $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)^2dx$ für $n = 2, 3, \ldots$ (betrachte $(2n+1)R_{n-1}P_n - (2n-1)R_nP_{n-1}$, integriere partiell und beachte h)
k) $(\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n)_n$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2((-1, 1))$, die durch Orthonormalisierung der Funktionen f_n, $f_n(x) = x^n$, entsteht.