Michael Winkler
Johannes Lankeit

13. Mai 2015

6. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: Unterräume sind konvex. Gib auch ein Beispiel für eine nicht konvexe Menge in einem Hilbertraum an.

Präsenzaufgabe 2:
Wahr oder falsch: Projektionen sind lineare Abbildungen? (Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.)

Präsenzaufgabe 3:
Finde einen Hilbertraum H und einen Unterraum $M \subset H$, sodass $H = M \oplus M^\perp$ **nicht** gilt.

Präsenzaufgabe 4:
Zeige: Ist P eine Orthogonalprojektion im Hilbertraum H, so auch $I - P$. (Worauf projiziert diese Abbildung?)

Präsenzaufgabe 5:
U und V seien abgeschlossene Unterräume des Hilbertraums H mit $U \subset V \subset H$ und zugehörigen Orthogonalprojektionen P_U und P_V. Zeige, dass $P_U P_V = P_U$.

Präsenzaufgabe 6:
Im Hilbertraum H seien Orthogonalprojektionen $Q_1, \dots Q_n$ gegeben mit $Q_i Q_j = 0$ für $i \neq j$. Definiere nun $P = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$. Weise nach, dass $\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Bild}(Q_1) \oplus \mathrm{Bild}(Q_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Bild}(Q_n)$ und $\ker(P) = \ker(Q_1) \cap \ker(Q_2) \cap \dots \cap \ker(Q_n)$.

Präsenzaufgabe 7:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir betrachten im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)(= (L^2(\Omega))^3)$ den Unterraum $L^2_\sigma(\Omega)$ der “quellfreien Vektorfelder”, der als Abschluss von $\{f \in C_0^\infty(\Omega)^3; \mathrm{div} f = 0\}$ in L^2 definiert ist.
Zeige, dass es eine lineare symmetrische Abbildung $\mathcal{P} \colon L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \to L^2_\sigma(\Omega)$ gibt, die Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ ebenso erfüllt wie $\|f\|^2 = \|Pf\|^2 + \|f - Pf\|^2$ für jedes $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und die alle Gradientenfelder auf 0 abbildet.

Präsenzaufgabe 8:
Es sei V ein normierter Raum. Setze

$$Tu = \begin{cases} u, & u \in B_1(0) \\ \frac{u}{\|u\|}, & \|u\| \geq 1 \end{cases}.$$

Zeige, dass $\|Tu - Tv\| \leq 2\|u - v\|$.
Zeige weiter, dass die Konstante 2 im Allgemeinen nicht verbessert werden kann.
Wie ist das in Hilberträumen?

Hausübungen

Abgabe: 20. Mai 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
Zeige, dass durch

$$(S_n f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(x-y))}{\sin(\frac{1}{2}(x-y))} f(y)dy$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ Orthogonalprojektionen in $L^2((-\pi,\pi))$ definiert sind, die (für $n, m \geq 0$) $S_n S_m = S_{\min\{n,m\}}$ erfüllen.
Tipp: Zeige zunächst $\sin(\frac{x}{2}) \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \ldots = \sin((n+\frac{1}{2})x)$ und nutze schließlich die Orthogonalität der $y \mapsto e^{-iky}$ in $L^2((-\pi,\pi))$.

Hausaufgabe 2:
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$ und $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Begründe, dass $L^2(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist. (Tipp: Die L^p-Räume sind vollständig.)
Schließe auf die Existenz einer Orthogonalprojektion

$$\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{A}_1] \colon L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu)$$

mit den folgenden Eigenschaften:
Für jedes $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}_1$.
Für jede Menge $A \in \mathcal{A}_1$ und jedes $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt $\int_A X = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$. (Tipp: 3.26 a))
Sind $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ σ-Algebren, so gilt für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, dass $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_2]|\mathcal{A}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_2]$.
Für $B \in \mathcal{A}_1$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt mit der Definition $P[B|A] = \frac{\langle \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_A \rangle}{\langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A \rangle}$ die sogenannte Bayes'sche Formel

$$P[B|A] = \frac{\int_B \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{A}_1]}{\int_\Omega \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{A}_1]}.$$

Hausaufgabe 3:
a) Es sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Hilbertraums H und $x_0 \in H$. Zeige: Dann ist $x = P_K x_0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\langle x - x_0, y - x \rangle \leq 0$ für alle $y \in K$. Was bedeutet das geometrisch?
b) Zeige: P_K ist stetig.

Hausaufgabe 4:
Für ein $a > 0$ sei $H := L^2(-a,a)$, $L_G := \{f \in H : f(t) = f(-t)$ für fast alle $t \in [-a,a]\}$ und $L_U := \{f \in H : f(t) = -f(-t)$ für fast alle $t \in [-a,a]\}$. Zeige:

a.) L_G und L_U sind unendlichdimensionale, abgeschlossene Untervektorräume von H.

b.) $L_U^\perp = L_G$ und $L_G^\perp = L_U$.

c.) Gib für beliebiges $h \in H$ die Abstände $d(h, L_G)$ sowie $d(h, L_U)$ an.

d.) Berechne für $t \in [-a,a]$ und $h(t) := t^2 + t$ die Abstände $d(h, L_G)$ und $d(h, L_U)$.

Hausaufgabe 5:
Nutze, dass $\{e^{2\pi inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2((0,1))$ bildet, und verwende die Parsevalsche Gleichung für $f(x) = x$, um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

nachzuweisen.

Hausaufgabe 6:
Es sei $A \colon H \to H$ ein stetiger symmetrischer linearer Operator. Zeige, dass

$$H = \ker A \oplus \overline{\operatorname{Bild} A}$$