Michael Winkler
Johannes Lankeit

20. Mai 2015

7. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei X ein normierter Raum und es gebe eine abzählbare Menge M mit $X = \overline{\operatorname{span} M}$. Zeige: X ist separabel.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige: ℓ^p ist separabel für $p \in [1, \infty)$. Zeige: $L^\infty((0,1))$ ist nicht separabel.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $f \in H$. Zeige: Durch $u \mapsto \langle u, f \rangle$ wird eine stetige lineare Abbildung definiert.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional auf dem Hilbertraum $\mathbb{R}^n$ mit euklidischem Skalarprodukt. Zeige: Dann gibt es $y \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) = \langle y, x \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es ist $\|f\| = \|y\|$

Präsenzaufgabe 5:
Es sei $p \in [1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige: Durch

$$T \colon \ell^q \ni (x_n)_n \mapsto \left\{ \ell^p \ni (y_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right\} \in (\ell^p)^*$$

wird ein isometrischer Isomorphismus zwischen ℓ^q und $(\ell^p)^*$ definiert.

Präsenzaufgabe 6:
Es sei X ein normierter Raum und $K \subset X$ kompakt. Zeige, dass es eine abzählbare Menge M mit $\overline{M} = K$ gibt.

Hausübungen

Abgabe: 27. Mai 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
a) Zeige: $C^0([0,1])$ ist separabel.
Betrachte dazu $f \in C^0([0,1])$ das n-te Bernsteinpolynom

$$p_n(s) = B_n(f, s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k} f(\frac{k}{n}).$$

Berechne $B_n(f_j, \cdot)$ für $f_j(x) = x^j$, $j \in \{0, 1, 2\}$. Zeige, dass es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|s - t| < \sqrt{\delta} \implies |f(s) - f(t)| < \delta \text{ und damit } -\varepsilon - \alpha y_t \le f - f(t) \le \varepsilon + \alpha y_t \quad \text{für alle } s, t \in [0,1],$$

wobei $\alpha = \frac{2\|f\|}{\delta}$ und $y_t(s) := (t-s)^2$.
Zeige

$$-B_n(\varepsilon + \alpha y_t; \cdot) = B_n(-\varepsilon - \alpha y_t; \cdot) \le B_n(f - f(t); \cdot) \le B_n(\varepsilon + \alpha y_t; \cdot)$$

und schätze $|p_n(s) - f(t)| \le B_n(\varepsilon + \alpha y_t; s) \le \ldots$ ab, um schließlich die gleichmäßige Konvergenz von p_n gegen f zu folgern.

b) Folgere Separabilität der Räume $L^p((0,1))$ für $p \in [1,\infty)$.

Hausaufgabe 2:

Zeige: ℓ^∞ ist nicht separabel, c, der Raum der konvergenten Folgen, ist separabel.

Hausaufgabe 3:

Wir betrachten die Funktion $f\colon (0,\infty) \to L^\infty((0,\infty))$, die jedes $t \in (0,\infty)$ auf die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{[0,t]}$ abbildet. Zeige, dass diese Funktion kein separables Bild hat. Wie ist das, wenn man die Funktion als Abbildung von $(0,\infty)$ nach $L^2((0,\infty))$ betrachtet?

Hausaufgabe 4:

X sei der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\alpha_k t}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1,\dots,n$).

a) Zeige, dass die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{C}$, die durch

$$\langle f, g\rangle = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

gegeben ist, ein Skalarprodukt auf X definiert.

b) Zeige, dass für die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ gilt, dass $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, falls sich $f \in X$ als $f = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\alpha_k t}$ (mit $\alpha_k \neq \alpha_j$ für $k \neq j$) darstellen lässt.

c) Sei $(c_k)_k \in l^2$ mit $c_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige anhand der Folge $f_n = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt}$, dass X nicht vollständig ist.

d) Sei H die Vervollständigung von X. Zeige: H, der Raum der "fast-periodischen Funktionen", ist ein nicht-separabler Hilbertraum.

Hinweis zu Teil d): Zeige: $t \mapsto e^{ist}$, $s \in \mathbb{R}$, ist Orthonormalsystem.

Hausaufgabe 5:

Es sei $p \in [1,\infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeige, dass zu $f \in L^q(\Omega)$ durch

$$T_f(g) = \int_\Omega fg$$

ein Funktional $T_f \in (L^p(\Omega))^*$ definiert wird.
Zeige: $T\colon L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ ist eine Isometrie und T ist injektiv.
Bemerkung: Im Fall $1 < p < \infty$ (und, da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sogar für $p = 1$) kann man zeigen, dass T sogar surjektiv ist und so eine recht konkrete Darstellung des Raumes $(L^p(\Omega))^*$ erhalten. Für $p = \infty$ ist T nicht surjektiv.

Hausaufgabe 6:

Bestimme die Dualräume von c_0 und c.