Michael Winkler
Johannes Lankeit

27. Mai 2015

8. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $A\colon H_1 \to H_2$ eine lineare stetige Abbildung zwischen den Hilberträumen H_1 und H_2.
Zeige, dass es eine eindeutige stetige lineare Abbildung $A^*\colon H_2 \to H_1$ gibt, sodass $\langle y, Ax\rangle = \langle A^*y, x\rangle$ für alle $x \in H_1, y \in H_2$.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine positiv definite symmetrische Matrix. Definiere $a(u,v) = v^T Au$.
Zeige, dass a eine stetige koerzive Bilinearform auf R^2 ist.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachte die Randwertaufgabe

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Formuliere in Anlehnung an Def. 5.2 eine Definition für schwache Lösungen dieser Gleichung.
Finde eine Bilinearform a und eine Linearform F, sodass u genau dann eine schwache Lösung der Gleichung ist, wenn $a(u,v) = F(v)$ für alle v aus einem geeigneten Raum gilt.
Zeige schließlich eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe (in dem zuvor definierten schwachen Sinne).

Präsenzaufgabe 4:
Eine SLF ist stetig genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Präsenzaufgabe 5:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $K\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige: Dann wird durch

$$Au(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \qquad x \in \Omega, u \in L^2(\Omega)$$

ein beschränkter Operator $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert (vgl. Bsp. 4.9, wo wir das für $A\colon C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ bewiesen haben).

Hausübungen

Abgabe: 10. Juni 2015, zu Beginn der Übung

Hausaufgabe 1:
Betrachten den HR $H = \ell^2$ sowie $V = \{u = (u_n)_n; \sum_{n=1}^\infty n^2 u_n^2 < \infty\}$ mit Skalarprodukt $(u,v) = \sum_{n=1}^\infty n^2 u_n v_n$.
Zeige: V ist dichte Teilmenge von H.
Zeige: $T\colon H^* \to V^*$, $\langle Th^*, v\rangle_{V^*,V} = \langle h^*, v\rangle_{H^*,H}$ qefiniert eine stetige, lineare, injektive Abbildung. In diesem Sinne ist also $H^* \subset V^*$. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet dürfen wir H und H^* identifizieren (*), sodass also $V \subset H \cong H^* \subset V^*$.
Zeige: Es ist damit $V^* = \{(f_n)_n; \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} f_n^2 < \infty\}$ und $\langle f, v\rangle_{V^*,V} = \sum_{n=1}^\infty f_n v_n$.
Bestimme den Isomorphismus $I\colon V \to V^*$ aus dem Satz von Riesz-Frechet und zeige, dass er hier nicht mit der Identität übereinstimmt.
Wodurch unterscheidet sich die Situation für V von der für H in (*)?

Hausaufgabe 2:

Es seien H_1, H_2 reelle Hilberträume und $a\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ eine bilineare stetige Abbildung. Es gebe $c > 0$, sodass

$$\forall u \in H_1 : \sup_{v \in H_2, \|v\|=1} |a(u,v)| \geq c\|u\|, \qquad \text{sowie } \forall v \in H_2 \setminus \{0\} \sup_{u \in H_1} a(u,v) > 0$$

gelten.

Beweise: Dann gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $T\colon H_1 \to H_2$ mit $a(u,v) = \langle Tu, v\rangle$ für alle $u \in H_1, v \in H_2$, und diese ist invertierbar (gib auch eine obere Schranke für die Norm an).

Zeige: Für jedes $f \in H_2^*$ hat die Gleichung

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in H_2$$

genau eine Lösung $u \in H_1$.

Hausaufgabe 3:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ sowie $\lambda > \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$. Zeige, dass es zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau ein $u \in L^2(\Omega)$ gibt mit

$$\int_\Omega K(x,y)u(y)dy = \lambda u(x) + f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Hausaufgabe 4:

Es sei H ein Hilbertraum und a eine stetige koerzive Sesquilinearform auf H. Zeige, dass zu gegebenem $f \in H$ die Lösung $y \in H$ von

$$a(x,y) = f(x) \qquad \forall x \in H$$

zugleich die eindeutige Minimalstelle des Funktionals

$$J(z) := \frac{1}{2}a(z,z) - \mathrm{Re} f(z), \quad z \in H,$$

ist.

(Berechne für beliebiges $x \in H$ die Differenz $J(x) - J(y)$ und schätze sie nach unten gegen ein positives Vielfaches von $\|x-y\|^2$ ab.)

Hausaufgabe 5:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Betrachte zu $a, c \in C^0(\overline{\Omega}), b \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) + b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) &= f(x), \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei es $a_0, a_1, b_1 > 0$ gebe, sodass $a_1 \geq a(x) \geq a_0$ und $\|b(x)\|_2 \leq b_1$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

a) Nimm an, dass es $c_0 > 0$ gibt, sodass $c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq c_0$ in Ω gilt, und zeige unter dieser Voraussetzung, dass die zugehörige Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega vb \cdot \nabla u + \int_\Omega cuv$$

auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ stetig und koerziv ist.

b) Zeige, dass für $f \in L^2(\Omega)$ das Dirichlet-Problem eine eindeutige (schwache) Lösung hat.

c) Es sei nun $a \equiv 1$, $b \equiv 0$. Wie darf c gewählt werden, sodass wir aus a) und b) auf die Existenz einer Lösung schließen können?