Michael Winkler
Johannes Lankeit

3. Juni 2015

9. Übung zur Vorlesung „Hilbertraummethoden“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Beweise das folgende Kriterium dafür, dass eine Teilmenge von $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ relativ kompakt ist:
Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R})$ relativkompakt genau dann, wenn

i) $\mathcal{F}$ beschränkt ist,

ii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$ für $R \to \infty$,

iii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f(x) - f(x+h)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$ für $h \to 0$. (“gleichgradige Stetigkeit im p-ten Mittel”)

a) Zeige zunächst die Eigenschaft ii) für einzelne Funktionen aus L^p (also ohne sup).

b) Zeige auch iii) für einzelne Funktionen. Beginne dabei mit dem Fall „charakteristische Funktion eines beschränkten Intervalls“ und approximiere allgemeine L^p-Funktionen durch einfache Funktionen (Treppenfunktionen).

c) Überdecke $\mathcal{F}$ mit endlich vielen Kugeln vom Radius ε. Warum ist das möglich?

d) Nutze die Mittelpunkte f_i der Kugeln und a) für jedes einzelne f_i, um ii) gleichmäßig für beliebiges $f \in \mathcal{F}$ zu zeigen.

e) Verfahre ebenso für iii).

· Zur Rückrichtung.
Definiere für $f \in L^p(\mathbb{R})$ die „Steklov-Mittelung“ durch $(S_r(f))(x) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x+s)\,\mathrm{d}s$.

f) Zeige durch geschickte Anwendung der Hölderschen Ungleichung, dass $\|S_r(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le r^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

g) Zeige ebenso, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|(S_r f)(x) - (S_r f)(x+h)| \le r^{-\frac{1}{p}} \|f - f_h\|_p$$

gilt.

h) Zeige darüberhinaus, dass

$$\|f - S_r f\|_p \le \sup_{0<h\le r} \|f - f_h\|_p$$

. Schätze dazu den Betrag $|(f - S_r f)(x)|$ wieder mit der Hölderschen Ungleichung ab, integriere dann über $\mathbb{R}$ und nutze abschließend den Satz von Fubini.

i) Begründe die folgenden drei Aussagen:
- Es genügt, zu zeigen, dass eine Überdeckung von $\mathcal{F}$ mit 3ε-Kugeln existiert.
- Es gibt ein $\overline{R} > 0$, sodass $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-R,R])} < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $R > \overline{R}$.
- Es gibt ein $r > 0$, sodass
$$\|f - S_r f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \sup_{0\le h\le r} \|f - f_h\| < \varepsilon$$
für alle $f \in \mathcal{F}, \forall |h| < r$.

j) Zeige: Die Menge $\mathcal{M} = \{\, S_r f|_{[-2R,2R]}\,;\, f \in \mathcal{F}\}$ ist eine relativkompakte Teilmenge von $C([-2R, 2R])$.

k) $\mathcal{M}$ lässt sich von endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{\varepsilon}{4R^{\frac{1}{p}}}$ und Mittelpunkten g_i überdecken. (Warum?) Definiere $f_i \in L^p(\mathbb{R})$ so, dass f_i auf $[-2R, 2R]$ mit g_i übereinstimmt. (Wähle für die letzten beiden Schritte nun R geeignet.)

l) Zeige abschließend, dass für jedes $f \in \mathcal{F}$ eines der f_i existiert mit $\|f - f_i\|_p \le 3\varepsilon$ und vollende den Beweis des Satzes.