Michael Winkler
Johannes Lankeit 15.12.2014

10. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Betrachte Lösungen der Gleichung
$$-\Delta u = u - u^2$$
auf $\mathbb{R}^1$, die $u(0) = a$ sowie $u'(0) = 0$ erfüllen.
a) Zeige, dass für $a \geq 1$ die Lösung u monoton wachsend ist.
Tipp: Für $a > 1$ betrachte $x_0 = \sup\{\overline{x} > 0; u > 1 \text{ auf } [0, x_0)\}$.
b) Für $a \in (0, 1)$ weise die Existenz einer Stelle $x_a > 0$ mit $u(x_a) = 0$ nach, sodass u auf $[0, x_a)$ positiv und monoton fallend ist.
Multipliziere dazu die Gleichung mit u', setze $x_a = \sup\{\overline{x} > 0; u' \leq 0 \text{und } u \geq 0 \text{ auf } [0, \overline{x}]\}$ und zeige, dass für $x \in [0, x_a]$ damit $x = \int_{u(x)/a}^{1} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2-\frac{2}{3}a(1-\sigma^3)}}$ gilt.
c) Zeige, dass die Abbildung $a \mapsto x_a$ aus b) streng monoton wachsend auf $(0, 1)$ ist und zeige, dass $\lim_{a\searrow 0} x_a = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{a\nearrow 1} x_a = \infty$.
d) Zeige, dass das Dirichlet-Problem
$$\begin{aligned} -\Delta u =& u - u^2, \qquad \text{in } \Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \\ u(\pm\frac{L}{2}) =& 0 \end{aligned}$$
im Fall $L \leq \pi$ nur die triviale Lösung als nichtnegative Lösung hat und dass für $L > \pi$ zusätzlich genau eine weitere nichtnegative Lösung existiert.
Im Fall $u \not\equiv 0$ betrachte für eine Maximalstelle x_0 von u die durch $\widetilde{u}(x) = u(x - x_0)$ definierte Funktion.

Hausübungen

Abgabe: 5.1.2015, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Die Funktion u löse
$$\begin{aligned} &u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + f(u(r)) = 0, \qquad r > 0, \\ &u(0) = a > 0, u'(0) = 0 \end{aligned}$$
mit einem $n \geq 3$ und wir definieren R als ihre kleinste positive Nullstelle. Die Funktion $f \in C^1([0, \infty))$ habe die folgenden Eigenschaften:
(F1) $f(0) = 0$, $f'(u) \leq 0$ auf $(0, \delta_0)$ mit einem positiven δ_0.
(F2) Es gebe $u_0 > 0$ mit $f'(u_0) > 0$ und $f(u)(u - u_0) > 0 \forall u \neq u_0$.
(F3) $f(u) \leq f'(u)(u - u_0)$ für alle $u \geq u_0$.
(F5) Es gebe $\overline{u} > 0$ mit $[\frac{2n}{n-2}F(u) - f(u)u](u - \overline{u}) \geq 0$ für alle $u \geq 0$, worin $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.
Zeige, dass die durch $\theta(r) = \frac{-ru'(r)}{u(r)}$ definierte Funktion in allen Stellen r mit $u(r) > u_0$ positive Ableitung hat.
Betrachte dazu zunächst $v(r) = ru'(r)$ und zeige $-\Delta v = f'(u)v + 2f(u)$.
Zeige dann, dass
$$r^{n-1}u^2(r)\theta'(r) = \int_0^r t^n(f'(u)uu' - f(u)u')dt + 2\int_0^r t^{n-1}f(u)udt$$
und folgere, dass $\theta'(r)$ dasselbe Vorzeichen hat wie
$$[f(u)u - 2F(u)]r^n + \int_0^r [2nF(u) - (n-2)f(u)u]t^{n-1}dt.$$

(Nimm im Folgenden an, es wäre bereits gezeigt, dass aus $u(r) \geq \overline{u}$ auch $u \geq \overline{u}$ auf $[0, r)$ folge und entsprechend $u(r) \leq \overline{u}$ bereits $u \leq \overline{u}$ auf (r, R) impliziere.) Zeige, dass (F2) und (F3) implizieren, dass $2F(u) \leq uf(u)$, wenn $u > u_0$, und nutze (F5), um den Beweis für den Fall $u(r) > \overline{u}$ abzuschließen.
Falls $u(r) < \overline{u}$, weise nach, dass

$$\int_0^r [2nF(u) - (n-2)f(u)u]t^{n-1}dt \geq \int_0^R [2nF(u) - (n-2)f(u)u]t^{n-1}dt = R^{n-1}(Ru'^2(R)) \geq 0.$$

Tipp zur letzten Gleichheit: Pohozaev.

Hausaufgabe 2:
Eine Lösung $u_{u_0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des Systems

$$\begin{aligned} u'_{u_0} =& f(u_{u_0}) \\ u_{u_0}(0) =& u_0 \end{aligned}$$

(mit Lipschitz-stetigem $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) heißt periodisch mit Periode T, falls $u_{u_0}(t+T) = u_{u_0}(T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
a) Zeige, dass die Menge $P = \{0\} \cup \{s; s \text{ ist Periode von } u_{u_0}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist.
b) Beweise: Wenn $\{u_{u_0}(t); t > 0\}$ nicht nur aus einem Gleichgewichtspunkt u_0 besteht, dann liegt P nicht dicht in $\mathbb{R}$.
c) Sei nun das System kooperativ. Es gebe $T > 0$, sodass $u_{u_0}(T) \leq u_0$ (in jeder Komponente). Ferner sei p ein Häufungspunkt von $\{u_{u_0}(kT); k \in \mathbb{N}\}$. Zeige, dass dann $u_{u_0}(T+t) \leq u_{u_0}(t)$ für alle $t > 0$ und $p = \lim_{k\to\infty} u_{u_0}((k+1)T) = \lim_{k\to\infty} u_{u_0}(kT)$ ist, und folgere, dass u_p periodisch mit Periode T ist.
d)Beweise: Wenn zu einer beschränkten Lösung u eines kooperativen Systems ein $T > 0$ existiert, sodass (komponentenweise) $u(T) < u_0$, so besteht $\omega(u)$ aus genau einem Gleichgewichtspunkt.
e) Zeige, dass jede beschränkte Lösung eines zweidimensionalen kooperativen Systems konvergiert.

Hausaufgabe 3:
Betrachte das Ross-Macdonald-Modell für die Ausbreitung von Malaria:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha y(1-x) - rx \\ y' &= \beta x(1-y) - \mu y. \end{aligned}$$

Darin beschreibt x den infizierten Anteil der menschlichen Bevölkerung, y den der weiblichen Moskitopopulation; α gibt die Rate an, mit der Menschen von Moskitos infiziert werden, β die Rate, mit der sich Moskitos bei Menschen infizieren; $\frac{1}{r}$ beschreibt die durchschnittliche Dauer einer Infektion beim Menschen, $\frac{1}{\mu}$ die Lebenszeit eines Moskitos. Mit N als Bevölkerungszahl der Menschen, m als Größe der Moskitopopulation und a als die Zahl an Stichen infizierter Moskitos, die beim Menschen eine Infektion hervorruft, ist $\alpha = \frac{a\beta M}{N}$.
a) Zeige, dass $[0,1]^2$ positiv invariant ist. (Warum ist das auch sehr sinnvoll?)
Wir wählen im Folgenden die Anfangswerte $x(0)$ und $y(0)$ aus dieser Menge.
b) Zeige, dass das System kooperativ ist. (Warum ist das auch aus biologischer Sicht „klar“?)
c) Welche Gleichgewichte hat das System in $[0,1]^2$ in Abhängigkeit von der Malariaausbreitungsrate $R = \frac{M}{N}\frac{\beta^2\alpha}{\mu r}$?
d) Untersuche das Langzeitverhalten des Systems.
e) Ist es nach diesem Modell erforderlich, alle Moskitos zu töten, um den Malariaerreger auszurotten?