Michael Winkler
Johannes Lankeit

5.1.2015

11. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige:

$$u_t = u_{xx} + \sqrt{1+u}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \sin x,\ x \in (0,\pi)$$

hat eine glatte klassische Lösung in $(0,\pi) \times (0, T_{max})$ für ein $T_{max} > 0$.
Was geschieht für $t \nearrow T_{max}$?
Zeige, dass $u(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}T_{max}) = u(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}T_{max})$.

Präsenzaufgabe 2:
Es seien $u, \widetilde{u} \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$ mit

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) =& f(x,t), && (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\ \widetilde{u}_t(x,t) - \Delta \widetilde{u}(x,t) =& f(x,t), && (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\ u(x,t) = 0 =& \widetilde{u}(x,t), && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\ u(x,0) =& \widetilde{u}(x,0), && x \in \Omega \end{aligned}$$

für eine gegebene Funktion $f \in C^1(\Omega \times (0,T))$ und ein glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie ein $T > 0$. Zeige durch Betrachtung von $\int_\Omega (u - \widetilde{u})^2$, dass $u = \widetilde{u}$.

Präsenzaufgabe 3:
Zeige, dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u =& u - u^2, && \text{in } \Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})\\ u(\pm\frac{L}{2}) =& 0 \end{aligned}$$

im Fall $L \leq \pi$ nur die triviale Lösung als nichtnegative Lösung hat und dass für $L > \pi$ zusätzlich genau eine weitere nichtnegative Lösung existiert.
Im Fall $u \not\equiv 0$ betrachte für eine Maximalstelle x_0 von u die durch $\widetilde{u}(x) = u(x - x_0)$ definierte Funktion.

Hausübungen

Abgabe: 12.1.2015, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Finde eine Lösung für

$$u_t = u_{xx}, \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

in der Form

$$u(x,t) = f(x + ct)$$

für zu bestimmendes $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 2:
Es sei $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ und $k = \frac{1}{\int_\mathbb{R} e^{-\frac{z^2}{4}}\,\mathrm{d}z} > 0$. Betrachte

$$u(x,t) = \frac{k}{\sqrt{t}} \int_\mathbb{R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

a) Zeige: Dies definiert eine Funktion $u\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

b) Zeige: u ist stetig. u lässt sich einmal partiell nach t und zweimal nach x ableiten und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung: $u_t = \Delta u$ in $\Omega \times (0,\infty)$ mit $\Omega = \mathbb{R}$.

c) Zeige: Es ist

$$\frac{k}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, \mathrm{d}y = 1$$

und für $\delta > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{k}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R} \setminus B_\delta(x)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, \mathrm{d}y = 0.$$

Tipp: Substitution. (vgl. Def k)

d) Für stetiges u_0 gilt $u(x,t) \to u_0(x)$ für $t \searrow 0$ und $x \in \mathbb{R}$.
Tipp: Zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $t_\varepsilon > 0$ existiert, sodass für $0 < t < t_\varepsilon$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (u_0(y) - u_0(x)) \, \mathrm{d}y \right| \le \varepsilon,$$

indem du den Integrationsbereich geeignet aufteilst. (Teil c könnte sich als hilfreich erweisen.)

e) Nimm an, dass die Anfangsbedingung durch $u_0(x) = e^{-|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Zu welchem der in Definition 2.1.1 genannten Funktionenräume gehört u in diesem Fall, welche(r) der dort eingeführten Lösungsbegriffe trifft auf u zu?

f) Angenommen, der Träger von u_0 ist enthalten in $[-1,1]$. Weiter sei $R > 0$. Wie schnell „hat sich die Wärme bis R ausgebreitet“, wie groß ist also $\inf\{t > 0 : u(R,t) > 0\}$?

Hausaufgabe 3:

Das Funktionenpaar (u,v) sei klassische Lösung des Chemotaxis-Systems

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) \\ v_t &= \Delta v - v + u \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} &= \partial_\nu v\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot,0) = u_0,\ & v(\cdot,0) = v_0 \end{aligned}$$

in $\Omega \times (0,\infty)$ mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand.
Zeige, dass $t \mapsto \int_\Omega u(t)$ konstant ist. Bestimme $\lim_{t\to\infty} \int_\Omega v(t)$.