Michael Winkler
Johannes Lankeit

19.1.2015

13. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige, dass Lösungen von

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + |x|^2, \quad x \in B_1(0),\, t > 0, \qquad u\big|_{\partial B_1(0)} = 0, \quad t > 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

global existieren, und untersuche ihr Langzeitverhalten.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ mit einem $L \in (0,\pi)$ und u sei klassische Lösung von

$$u_t = \Delta u + u - u^2, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0.$$

Zeige, dass u global existiert und gegen 0 konvergiert.

Präsenzaufgabe 3:
Gegeben sei eine klassische Lösung von

$$u_t = \Delta u + |x|e^{-t}, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0.$$

Zeige, dass sie global ist, und bestimme ihr Langzeitverhalten.

Präsenzaufgabe 4:
Die Funktion $f\colon \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ erfülle $\sup_{x\in\Omega} f(x,\cdot) \in L^1((0,\infty))$. Es gelte

$$u_t = \Delta u + f, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0.$$

Zeige, dass $u(\cdot,t)$ für $t \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.[1]

Hausübungen

Abgabe: 26.1.2015, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Betrachte das Anfangsrandwertproblem

$$u_t = \Delta u + f(x,t,u), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0,$$

wobei $f \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty) \times J)$ für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ sowie $u_0 \in C^1(\Omega; J)$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ seien und f

$$\sup_{v\in J} \|f(\cdot,t,v) - g(\cdot)\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty$$

für ein $g \in C^0(\overline{\Omega})$ erfülle, für das

$$0 = \Delta w + g(x), \qquad w\big|_{\partial\Omega} = 0$$

lösbar sei (mit Lösung w).
Zeige, dass dann

$$\|u(\cdot,t) - w\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty.$$

[1] Für alle auftretenden Funktionen seien Voraussetzungen zum Vertauschen von Integral und Ableitungen und beliebige Glattheitsannahmen erfüllt.

Hausaufgabe 2:
Leite aus Satz 2.2.3 eine Eindeutigkeitsaussage für Lösungen des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

für $f \in C^0(\Omega)$ her. Beachte, dass keinerlei Radialsymmetrie gefordert werden muss (weder von f noch von Ω).

Hausaufgabe 3:
Es sei $u_0 \in C^1((-R,R))$ radial mit $u_0(R) = 0$ und monoton fallend auf $(0,R)$. Es sei $u \in C^{2,1}([-R,R] \times [0,\infty))$ glatte klassische Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(\cdot,0) = u_0, \\ u(R) = u(-R) = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $u(\cdot,42)$ radial und auf $(0,R)$ monoton fallend ist. Tipp: Welche Gleichung löst die räumliche Ableitung von u?

Hausaufgabe 4:
Es sei w eine Lösung von $-\Delta w = \lambda_1 w$, $w\big|_{\partial\Omega} = 0$ in Ω und $f(x,t) = w(x)\sin(\alpha t)$ mit einem $\alpha > 0$.
a) Zeige, dass es Anfangsfunktionen $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ gibt, sodass

$$u_t = \Delta u + f, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

periodisch ist, dass es also $T > 0$ gibt mit $u(x,t) = u(x,t+T)$ für alle $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,\infty)$.
b) Zeige, dass sich die Lösung u für jede beliebige Anfangsfunktion an eine periodische Funktion annähert. (Präzisiere dabei diese Aussage.)
c) Konvergiert (in der Situation aus b)) $u(\cdot,t)$ für $t \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion? Falls „ja“: Welche? Falls „vielleicht“: Unter welchen Bedingungen an die Anfangswerte?
d) Sei $g(x,t) = f(x,t) + \varepsilon(x,t)$ mit einer Funktion ε, die $\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon(\cdot,t)\|_\infty = 0$ erfüllt. Welche zu a) oder b) ähnlichen Aussagen lassen sich für die Lösung von

$$u_t = \Delta u + g, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

erhalten?