Michael Winkler
Johannes Lankeit

26.1.2015

14. Übung zur „Höheren Analysis" im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Bestimme $\omega(u)$ für eine glatte klassische Lösung u von

$$u_t = \Delta u + |x|, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \in C(\overline{\Omega})$$

in $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Präsenzaufgabe 2:
Seien $n \geq 1$, $R > 0$, $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $C > 0$ sowie $q > n$. Zeige, dass jede Folge aus der Menge

$$\{u \in C^1(\overline{\Omega}); u \text{ ist radial }, u\big|_{\partial\Omega} = 0, \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} < C\}$$

eine in $C^0(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge enthält.

Präsenzaufgabe 3:
Beweise Behauptung 6 aus dem Beweis von Lemma 2.3.7 für $n = 2$.

Präsenzaufgabe 4:
Nutze die „Wärmeleitungshalbgruppe" $e^{t\Delta}$, um die Abbildungsvorschrift einer Abbildung anzugeben, die eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t =& \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) \\ v_t =& \Delta v - v + u \\ u\big|_{\partial\Omega} =& v\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot,0) =& u_0, \quad v(\cdot,0) = v_0 \end{aligned}$$

als Fixpunkt hat. (Wodurch unterscheidet sich dieses System von dem früher (z.B. Blatt 11, HA 3) betrachteten Chemotaxissystem?)

Hausübungen

Abgabe: 2.2.2015, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $\Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \subset \mathbb{R}$. Betrachte

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + u - u^2 \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \end{aligned}$$

für radiales $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $0 < u_0$ in Ω, $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$.
Zeige, dass eine globale glatte klassische Lösung u existiert und bestimme $\omega(u)$.

Hausaufgabe 2:
Seien $n \geq 1$, $R > 0$, $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $C > 0$ sowie $1 \leq p \leq n$. Finde (in Abhängigkeit von n und p) das bestmögliche $p^* \in [1, \infty)$, sodass jede Folge aus

$$M_p := \{u \in C^1(\overline{\Omega}); u \text{ ist radial }, u\big|_{\partial\Omega} = 0, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} < C\}$$

eine in $L^{p^*}(\Omega)$ konvergente Teilfolge enthält.

Hausaufgabe 3:
Beschreibe $\omega(u)$ für Lösungen u der Wärmeleitungsgleichung mit periodischem Quellterm (wie in Blatt 13, HA 4):

$$u_t = \Delta u + \sin(\alpha t) w(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0,$$

worin $0 \not\equiv w$, $-\Delta w = \lambda_1 w$, $w\big|_{\partial\Omega} = 0$.