Michael Winkler
Johannes Lankeit

20.10.2014

2. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
a) Zeige: $f \in C^1(\mathbb{R})$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn die Ableitung beschränkt ist.
b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Lipschitz-stetig?
c) Hat das Anfangswertproblem $u' = u^2$, $u(0) = 42$ eine eindeutige Lösung?

Präsenzaufgabe 2:
Löse die folgenden AWPe:

$$a) u'(t) = \sqrt{1+u(t)}, \qquad u(0) = 1$$
$$b) (\ln \circ u)'(t) = 2 + \frac{t}{u}, \qquad u(0) = 1$$
$$c) u'(t) = \sin(t)u(t) + \cos(t), \qquad u(0) = 7$$
$$d) u'(t) = (1+u^2(t))a(t)\arctan(u(t)) + u^2(t)b(t) + b(t), \qquad u(0) = 0$$

wobei in d) a, b gegebene stetige Funktionen seien.

Präsenzaufgabe 3:
Gegeben sei eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) = a(t)u(t) + b(t), t > 0$ (mit bekannten Funktionen a, b, und α sei positiv).

a) Falls $a \geq \alpha$, $b \geq 0$, $u(0) > 0$, so ist $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$.
b) Falls $a, b \in L^1((0,\infty))$, ist u beschränkt.
c) Falls $a \leq -\alpha$ und b beschränkt, so ist auch u beschränkt.
d) Falls $a \leq -\alpha$ und $b \in L^1((0,\infty))$, so ist $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Hinweis: Der Beweis für a)-c) darf sehr kurz ausfallen.

Präsenzaufgabe 4:
Bestimme $\lim_{t\to\infty} u(t)$ für die Lösung u von

$$a)\ u'(t) = \frac{1}{1+t^2}u(t) + \frac{1}{1+t^2}, \quad u(0) = u_0, \qquad b)\ u'(t) = e^{-t^2}u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = u_0 = 1,$$
$$c)\ u'(t) = (12\sin(2t^{13}) - 23)u(t) + e^{-t^3}\cos(t)t, \qquad u(0) = 42.$$

Hausübungen

Abgabe: 27.10.2014, 9:01 Uhr

Hausaufgabe 1:
Betrachte das AWP
$$u'(t) = -2(t-1)(u(t))^2, \qquad u(0) = u_0.$$
Zeige, dass es eindeutig lösbar ist, bestimme die Lösung und das maximale Existenzintervall $(T_{min}(u_0), T_{max}(u_0))$. Ist die Abbildung $\mathbb{R} \ni u_0 \mapsto T_{max}(u_0)$ stetig?

Hausaufgabe 2:

Betrachte die Lösung u von $u'(t) = -u(t) + \sqrt{t}, \quad u(0) = u_0 > 0$ und zeige[1]: $\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = 1$.

Hausaufgabe 3:

Gegeben sei eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) = a(t)u(t) + b(t), t > 0$, $u(0) = u_0$, (mit bekannten Funktionen a, b, wobei eine Zahl $\alpha \in (-\infty, 0)$ existiere, derart, dass $a \leq \alpha$). Zeige:
Falls es ein $C > 0$ gibt, mit dem für alle $t > 0$ die Ungleichung $\int_t^{t+1} |b(s)| \, \mathrm{d}s \leq C$ gilt, so ist u beschränkt.

Hausaufgabe 4:

Gegeben seien eine positive Funktion $f \in C^1(0, \infty)$ mit $\int_1^\infty \frac{1}{f(s)} ds < \infty$ und $u_0 > 0$. Zeige: Die Lösung u von

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0$$

explodiert in endlicher Zeit gegen ∞.
Betrachte nochmals Blatt 1, Hausaufgabe 3.[2] Auf welche Teilaufgabe(n) ist dieses Kriterium anwendbar?

Hausaufgabe 5:

In dieser Aufgabe betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > t_0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = z_0. \qquad (AWP)$$

Dabei ist $a \geq 0$, $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine auf der Menge $I \times U$ (für $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $I = [0, \sup I)$, $\sup I \in (0, \infty]$) definierte, stetige Funktion, die in der zweiten und dritten Komponente lokal Lipschitz-stetig ist (mit vom ersten Argument unabhängiger Lipschitz-Konstante), $(t_0, y_0, z_0) \in I \times U$ mit $t_0 \geq 0$ und, falls $t_0 = 0$, auch $z_0 = 0$.

a) Formuliere obiges AWP als Integralgleichung (IG).[3]

b) Zeige, dass jede stetig differenzierbare Lösung von (IG) zweimal stetig differenzierbar ist und (IG) und (AWP) äquivalent sind.

c) Zeige mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass (IG) lokal eine eindeutige Lösung in C^1 hat. Genauer: Zeige: Ist $(0, y_0, z_0) = (0, y_0, 0) \in I \times U$, so existieren $T > 0$ und genau eine Funktion $y \in C^1([0, T))$, die (IG) löst.
Liegt (t_0, y_0, z_0) im Innern von $I \times U$ (mit insbesondere $t_0 > 0$), so existieren ein $T > 0$ und genau eine Funktion $y \in C^1((t_0 - T, t_0 + T))$, die (IG) löst.

d) Zeige: Ist y eine Lösung von (IG) auf dem Intervall (τ, T) mit $\tau, T > 0$, für die $y_1 = \lim_{t \uparrow T} y(t)$ und $z_1 = \lim_{t \uparrow T} y'(t)$ existieren und $(T, y_1, z_1) \in I \times U$ erfüllen, so gibt es auch eine Lösung von (IG) auf einem Intervall (τ, T_1) für ein $T_1 > T$, die auf (τ, T) mit y übereinstimmt.

e) Zeige: Zu dem Anfangswertproblem

$$y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

gibt es $T_{max} \in (0, \infty]$ und eine Funktion $y \in C^1([0, T_{max}))$ sowie eine Folge $(t_k)_k$, mit $t_k \nearrow T_{max}$ und entweder $\|y(t_k)\|_\infty + \|y'(t_k)\|_\infty \to \infty$ oder $(y(t_k), y'(t_k)) \to x$ mit einem $x \in \partial U$ für $k \to \infty$ – oder aber $T_{max} = \sup I$.

---

[1] Kryptischer Tipp: Für nichtnegative Funktionen f sowie $\delta \in (0, t)$ ist $\int_0^t f \geq \int_{t-\delta}^t f$.

[2] Blatt 1, HA3: Stelle fest, ob die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme global existieren oder nach endlicher Zeit explodieren. Dabei sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

$a)\ u' = u^2 + 3u + 2, \quad u(0) = 1$ $\qquad b) u'(t) = u^2(t) + t, \quad u(0) = 1$ $\qquad c)\ u' = u \cdot (\ln(1 + u))^\alpha \quad u(0) = u_0 > 0$

[3] Als hilfreich könnte sich die Beobachtung erweisen, dass $y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) = (g \cdot (hy')')(t)$ für geeignete Funktionen g, h ist.