Michael Winkler
Johannes Lankeit

27.10.2014

3. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:

a) Betrachte das Anfangswertproblem
$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0$$
mit einer solchen Funktion f, dass der Vergleichssatz anwendbar sei.
Zeige: Die Lösung ist eindeutig.

b) Zeige an einem konkreten Gegenbeispiel, dass man in den Voraussetzungen des Vergleichssatzes nicht ohne Weiteres auf lokale Lipschitz-Stetigkeit verzichten kann.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige durch Anwendung des Vergleichssatzes, dass die Lösung von
$$u' = u^2 + t, \qquad u(0) = 1$$
in endlicher Zeit explodiert.

Präsenzaufgabe 3:
Fülle so aus, dass die Abschätzungen für alle $x, y \geq 0$ aus der Young'schen Ungleichung folgen:

$$xy \leq x^2 + \square y^{\square}, \qquad x \leq x^4 + \square \cdot 1, \qquad x \leq x^4 + \square x^{-\square}$$
$$xy \leq x^3 + \square y^{\square}, \qquad xy \leq 4x^2 + \square y^{\square}, \qquad xy \leq x^{\frac{4}{3}} + \square y^{\square}$$

Präsenzaufgabe 4:
Seien $a, b > 0$. Betrachte eine Funktion y, die
$$y' = ay - by^2, \qquad y(0) = y_0 > 0$$
löst, und zeige, ohne sie explizit zu berechnen:

a) Die Funktion y ist nichtnegativ.

b) Ist $y_0 \leq \frac{a}{b}$, so ist auch $y(t) \leq \frac{a}{b}$ für alle $t > 0$.

c) Ist $y_0 \geq \frac{a}{b}$, so ist auch $y(t) \geq \frac{a}{b}$ für alle $t > 0$.

d) Ist $y_0 \geq \frac{a}{b}$, so ist y monoton fallend. Ist $y_0 \leq \frac{a}{b}$, so ist y monoton wachsend.

e) Zeige: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a}{b}$.

Präsenzaufgabe 5:
Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p, q \geq 1$.
Zeige: Ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, so folgt $uv \in L^1(\Omega)$ und $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.
Ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ mit einem $r \geq 1$, $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, so ist $uv \in L^r(\Omega)$ und $\|uv\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Hausübungen

Abgabe: 3.11.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $a > 0$ und α eine Funktion mit $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$ sowie $u_0 > 0$. Betrachte die Lösung u von

$$u'(t) = \alpha(t)u(t) - a \cdot (u(t))^2, \ \ t > 0; \ \ u(0) = u_0$$

und zeige, dass $u(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Hausaufgabe 2:
Unter der Bezeichnung „Young'sche Ungleichung“ findet man manchmal auch die folgende Aussage:
Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ streng monoton steigend, unbeschränkt und stetig mit $f(0) = 0$. Dann gilt für $a, b \geq 0$

$$ab \leq \int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Beweise sie. (Die geometrische Anschauung, die diese Aussage „offensichtlich“ macht, lässt sich formalisieren.)
Was ist der Zusammenhang zwischen dieser Young'schen Ungleichung und Lemma 1.2.5?
Welche Ungleichung erhält man für $f(x) = \ln(1 + x)$?

Hausaufgabe 3:
Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $u\colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, mit $\Omega = (0,1)^2$, von der bekannt sei, dass

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega u(x,t)|\nabla u(x,t)|^2\ \mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^4\ \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Hausaufgabe 4:
Es sei $u_0 \in \mathbb{R}$ und u löse, wie in Hausaufgabe 8 auf Blatt 1,

$$u'(t) = \sin(u(t))e^{\cos(u(t))}, \quad t > 0, \qquad\qquad u(0) = u_0.$$

Zeige: u ist beschränkt.

Hausaufgabe 5:
Finde ein Intervall I, sodass für jeden Anfangswert $u_0 \in I$ die Lösung von

$$\begin{aligned} &a) \quad u' = u^2 + 3u + 2, \qquad u(0) = u_0 \\ &b) \quad u' = (\sqrt{u} + u^2)\cos(u), \qquad u(0) = u_0 \end{aligned}$$

global und beschränkt ist.

Hausaufgabe 6:
Betrachte wie in Beispiel 1.2.7 die Lösung u von

$$u' = tu^2 - 1, \qquad u(0) = u_0 > \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

und zeige, dass sie in endlicher Zeit explodiert.
Zeige dazu zunächst, dass unter obiger Voraussetzung an u_0 ein $t_1 > 0$ existiert, sodass $u_0 - t_1 > \frac{1}{\sqrt{t_1}}$.
Folgere $u(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t_1}}$ für alle $t \in [t_1, T_{max})$.
Zeige, dass mit $t_2 > t_1$ auf (t_2, T_{max}) die Differentialungleichung $u' \geq (t_2 - t_1)u^2$ erfüllt ist, und schließe $T_{max} < \infty$.