Michael Winkler
Johannes Lankeit

3.11.2014

4. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
a) Bestimme $\lim_{t \nearrow T_{max}} u(t)$ für die Lösung u von

$$u' = (u^2+1)(u-2)(u-3)(u-4)(u^2-11u+30); \qquad u(0) = u_0.$$

in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$.
b) Zeige, dass es $t_0 > 0$ gibt, sodass die Lösung u von

$$u' = 1 + u - u^\pi, \qquad u(0) = 12$$

(global ist und) für alle $t > t_0$ die Eigenschaft $u(t) \leq 2$ hat.

Präsenzaufgabe 2:
Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig mit $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Zeige, dass dann nicht unbedingt $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ gelten muss, aber zumindest eine Folge $t_j \to \infty$ mit $f(t_j) \to 0$ für $j \to \infty$ existiert.

Präsenzaufgabe 3:
a) Beweise (durch Umformulieren in eine Integralgleichung und Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes) die folgende Version des Satzes von Picard-Lindelöf: $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig, $u_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $T > 0$, sodass das Problem

$$u'(t) = f(u(t),t), \qquad u(0) = u_0$$

für jedes $\tau \in (0,T)$ genau eine Lösung in $C^1((-\tau,\tau))$ hat. Was muss man ändern, wenn der Satz auf Systeme wie in (2.1) anwendbar sein soll?
b) Auf welche Abbildung müsste man den Banachschen Fixpunktsatz anwenden, um eine entsprechende Aussage für die Gleichung $t^{-a}(t^a y')' = f(t,y,y')$ zu erhalten?

Präsenzaufgabe 4:
Zeige, dass für die in 2.1.4 eingeführte Matrixnorm sowie für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt, dass

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Präsenzaufgabe 5:
Löse

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Abgabe: 10.11.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Bestimme $\lim_{t \nearrow T_{max}} u(t)$ für die Lösung u von

$$u' = e^{-u} - u; \qquad u(0) = u_0 \qquad \text{bzw. von} \qquad u' = u^2 + 3u + 2; \qquad u(0) = u_0$$

in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$. Bestimme auch T_{max}.

Hausaufgabe 2:

Es seien a, b und r sowie $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$ positiv und es gelte $b > a$. Die Funktionen $u, v\colon [0, T_{max}) \to \mathbb{R}$ mögen die maximale Lösung des einfachen Systems für zweigeschlechtliche Populationsdynamik bilden, das durch

$$\begin{aligned} u' &= r\frac{v}{u+v} \cdot u - au \\ v' &= r\frac{u}{u+v} \cdot v - bv \end{aligned}$$

gegeben ist. Zeige, indem du zunächst die Gleichungen einzeln betrachtest, dass sowohl u als auch v positiv sind und dass sie sich nach oben und nach unten jeweils gegen eine positive, stetige, auf ganz $[0, \infty)$ definierte Funktion abschätzen lassen.[1]

Beweise: Ist $r < b - a$, so gilt $\frac{u(t)}{v(t)} \to \infty$ für $t \to \infty$.

Ist $r > b - a$, so folgt $\frac{u(t)}{v(t)} \to \frac{r+(b-a)}{r-(b-a)} > 0$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Leite dafür zunächst eine Differentialgleichung für die skalare Größe $z = \frac{u}{v}$ her.[2]

Hausaufgabe 3:

Es sei $a \geq 0$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine auf der Menge $I \times U$ (für $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $I = [0, \sup I)$, $\sup I \in (0, \infty]$) definierte, stetige Funktion, die in der zweiten und dritten Komponente lokal Lipschitz-stetig ist (mit vom ersten Argument unabhängiger Lipschitz-Konstante), $(y_0, 0) \in U$.

Zeige: Zu dem Anfangswertproblem

$$y''(t) + \frac{a}{t}y'(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

gibt es $T_{max} \in (0, \infty]$ und eine Funktion $y \in C^1([0, T_{max}))$ sowie eine Folge $(t_k)_k$, mit $t_k \nearrow T_{max}$ und entweder $\|y(t_k)\|_\infty + \|y'(t_k)\|_\infty \to \infty$ oder $(y(t_k), y'(t_k)) \to x$ mit einem $x \in \partial U$ für $k \to \infty$ – oder aber $T_{max} = \sup I$.

Hausaufgabe 4:

Zeige, dass Lösungen u, v des Systems

$$\begin{aligned} u' &= 2u - v - uv \qquad & u(0) = u_0 \\ v' &= uv + v - 2u \qquad & v(0) = v_0 \end{aligned}$$

mit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in (0, T_{max})$ die Gleichung $u(t) + v(t) = u_0 + v_0$ erfüllen.

Hausaufgabe 5:

Löse $u' + Au = f(t), u(0) = u_0$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ sowie für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $u_0 \in \mathbb{R}^3$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2 \\ e^{3t} - 1 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 6:

Bestimme die Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= 21u + \frac{1}{2}v \\ v' &= \frac{1}{2}w + 21v \\ w' &= 21w \\ u(0) = u_0, \quad v(0) &= v_0 \quad w(0) = w_0. \end{aligned}$$

[1]Damit kann man $T_{max} = \infty$ folgern und die Frage nach $\lim_{t\to\infty}$ im nächsten Aufgabenteil wird sinnvoll.

[2]Sie wird ungefähr die Form $z' = z(\ldots - r\frac{\cdot - \cdot}{\cdot + \cdot})$ haben.