Michael Winkler
Johannes Lankeit

10.11.2014

5. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gelte

$$\mathrm{Re}\lambda > 0 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

und es sei $u_0 \in \mathbb{C}^n$. Ferner sei $f \in C^0([0,\infty);\mathbb{C}^n)$ so, dass $\int_0^\infty \|f(t)\| dt < \infty$.
Zeige, dass die Lösung u von

$$\begin{aligned} u' + Au &= f \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

global existiert und die Eigenschaft

$$u(t) \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty$$

hat.

Präsenzaufgabe 2:
Betrachte

$$\begin{aligned} u' + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} u &= \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1}\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix} \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} u' + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} u &= \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} \\ u(0) &= \begin{pmatrix} 42 \\ 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und bestimme $\lim_{t\to\infty} u(t)$.

Präsenzaufgabe 3:
Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $u\colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, mit $\Omega = (0,1)^2$, von der bekannt sei, dass

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega u(x,t)|\nabla u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^4\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ ist.

Präsenzaufgabe 4:
Bestimme die stationären Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} u' &= u^2 + 2uv + v^2 \\ v' &= u^2 v - 3v + v^2. \end{aligned}$$

Gibt es auch Systeme mit unendlich vielen stationären Lösungen?

Hausübungen

Abgabe: 17.11.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gelte

$$\mathrm{Re}\lambda > 0 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

und es sei $u_0 \in \mathbb{C}^n$. Ferner sei $f \in C^0([0,\infty);\mathbb{C}^n)$ so, dass

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Zeige, dass die Lösung u von

$$\begin{aligned} u' + Au =& f \\ u(0) =& u_0 \end{aligned}$$

dann

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$$

erfüllt.
In anderen Worten: Beweise 2.1.10 b). Verwende im Beweis insbesondere **nicht** Satz 2.1.11, der mittels dieser Aussage bewiesen wurde.

Hausaufgabe 2:
Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' =& 2u - v - u^2 v \\ v' =& u^2 v + v - 2u \\ u(0) =& u_0 \qquad v(0) = v_0 \end{aligned}$$

für $u_0, v_0 \geq 0$.

a) Zeige: Zu jedem $u_0 \geq 0$ gibt es $v_0 \geq 0$, sodass die zugehörige Lösung (u,v) global existiert.

b) Zeige: Zu jedem $u_0 \geq 0$ gibt es $v_0 \geq 0$, sodass die zugehörige Lösung (u,v) in endlicher Zeit explodiert.

c) Zeige: Für $u_0 = v_0 = 0$ ist $u \equiv 0 \equiv v$ die eindeutige Lösung.

d) Müssen $u(t)$ und $v(t)$ für alle $t \in (0, T_{max})$ nichtnegativ sein?

Hausaufgabe 3:
Bestimme $\lim_{t\to\infty} u(t)$ für die Lösung u von

$$u' + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \\ \arctan(t) - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 4:
Bestimme in Abhängigkeit vom Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ maximale Existenzzeit T_{max} sowie den Grenzwert der Lösung (u,v) von

$$\begin{aligned} u' =& -42u + 2v^2 \\ v' =& -v^3 e^{v^3} + v^2 e^{v^3} - 5e^{v^3} \\ u(0) =& u_0, \quad v(0) = v_0 \end{aligned}$$

für $t \to T_{max}$.