Michael Winkler
Johannes Lankeit

17.11.2014

6. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Gilt für allgemeine Differentialgleichungssysteme ein Vergleichssatz?

Präsenzaufgabe 2:
Bestimme die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$u' = u - uv, \qquad\qquad v' = u - v$$

und untersuche sie auf Stabilität.

Präsenzaufgabe 3:
Betrachte das klassische Lotka-Volterra-System

$$\begin{aligned} u' =& u(\alpha - \beta v) \\ v' =& -v(\gamma - \delta u), \end{aligned}$$

mit gegebenen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, das die zeitliche Entwicklung einer Populationsgröße u von Raubtieren und der Beutetierpopulationsgröße v beschreiben soll.
Was können wir mit Satz 2.2.3 (bzw. Cor 2.2.5) und Satz 2.2.8 über die Stabilität der Gleichgewichtslösungen aussagen?

Präsenzaufgabe 4:
Es sei (für Lipschitz-stetiges $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $u_0 \in \mathbb{R}^n$) $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung des Systems $u' = f(u), u(0) = u_0$ mit $\lim_{t\to\infty} u(t) = u^* \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass dann $f(u^*) = 0$.

Präsenzaufgabe 5:
Beweise:
a) Ist $A \subset \mathbb{R}^m$ zusammenhängend und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ stetig, so ist $f(A)$ zusammenhängend.
b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, so auch $\overline{A}$.
c) Es seien $A_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ zusammenhängend und kompakt und es gelte $A_{j+1} \subset A_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\bigcap_{j=1}^\infty A_j$ zusammenhängend und kompakt.

Hausübungen

Abgabe: 24.11.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' =& u^2 v - u \\ v' =& u^2 v + uv^2 - v. \end{aligned}$$

Bestimme alle Gleichgewichtspunkte und untersuche jeweils, ob sie stabil sind.

Hausaufgabe 2:
Sei $n \geq 1$ und $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Das System $u' = F(u)$ habe genau einen Gleichgewichtspunkt x_0.

Dieser sei stabil. Beweise oder widerlege: Dann ist $\lim_{t\to\infty} u(t) = x_0$.

Hausaufgabe 3:
Finde die Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems

$$\begin{aligned} x' =& -10x + 10y \\ y' =& 28x - y - xz \\ z' =& -\frac{8}{3}z + xy. \end{aligned}$$

Ist auch ein stabiles Gleichgewicht darunter?

Hausaufgabe 4:
Betrachte die Systeme

$$\begin{aligned} u' =& v \\ v' =& -u \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u' =& v - u^3 \\ v' =& -u - v^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u' =& v + u^3 \\ v' =& -u + v^3. \end{aligned}$$

(Was haben sie miteinander zu tun?)
In welchen Fällen ist das Gleichgewicht stabil, asymptotisch stabil, instabil?
Tipp: Betrachte den Abstand vom Ursprung.

Hausaufgabe 5:
Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' =& \alpha u - au^2 + Auv \\ v' =& \beta v - bv^2 + Buv \end{aligned}$$

für positive Anfangswerte $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0$.
Bestimme die Werte der Parameter $\alpha, a, A, \beta, b, B > 0$, für die nichtkonstante Lösungen (u, v) konvergent sein können.

Hausaufgabe 6:
Ein Differentialgleichungssystem heißt kooperativ, falls es von der Form

$$\begin{aligned} u_1' &= f_1(u_1, \ldots, u_n, t) \\ &\ldots \\ u_n' &= f_n(u_1, \ldots, u_n, t) \end{aligned} \tag{1}$$

mit einer Funktion f ist, für die $s_j \mapsto f_i(s_1, \ldots, s_n)$ für alle $i = 1, \ldots n$ und $j \neq i$ und für $k \neq j$ festgehaltene Argumente s_k, monoton wachsend ist.
Beweise den folgenden Vergleichssatz für kooperative Systeme[1]:
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $J_1, \ldots, J_n \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon J_1 \times \ldots \times J_n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig bzgl. $(u_1, \ldots, u_n) \in J_1 \times \ldots \times J_n)$ und erfülle o.g. Kooperativitätsbedingung.
Sind dann $(\overline{u}_1, \ldots \overline{u}_n)$ eine „Oberlösung“ und $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ eine „Unterlösung“ (1), sind also $(\overline{u}_1, \ldots \overline{u}_n), (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)\colon [0, T] \to J_1 \times \ldots \times J_n$ stetig differenzierbar mit

$$\overline{u}_i(t)' \geq f_i(\overline{u}_1(t), \ldots \overline{u}_n(t), t), \qquad \underline{u}_i(t)' \leq f_i(\underline{u}_1(t), \ldots, \underline{u}_n(t), t), \qquad \overline{u}_i(0) \geq \underline{u}_i(0)$$

für alle $t \in [0, T]$ sowie für alle $i = 1, \ldots n$, so folgt

$$\overline{u}_i(t) \geq \underline{u}_i(t)$$

für alle $t \in [0, T]$ und $i \in \{1, \ldots n\}$.
Betrachte nochmals Aufgabe 5 und zeige für die Fälle, in denen es keine konvergenten positiven Lösungen gibt, durch Vergleich mit $(\frac{c}{T_0 - t}, \frac{d}{T_0 - t})$ oder[2] $(ce^{\gamma t}, de^{\gamma t})$ (für geeignet gewählte Konstanten), dass die positiven Lösungen in endlicher Zeit explodieren bzw. unbeschränkt sind.

[1] Vielleicht kann der Beweis des Vergleichssatzes 1.2.2 einige Ideen liefern.
[2] Für die Parameter, für die ersteres nicht möglich ist