Michael Winkler
Johannes Lankeit

24.11.2014

7. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: Für die Gleichung

$$u' = \alpha u - au^2$$

(mit $\alpha, a \in \mathbb{R}$) definiert

$$\Phi(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{a}{3}x^3$$

eine Lyapunov-Funktion. Handelt es sich um eine strikte Lyapunov-Funktion?

Präsenzaufgabe 2:
Zeige:

$$\Phi(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y$$

definiert eine Lyapunov-Funktion für das Lotka-Volterra-System

$$u' = u(\alpha - \beta v), \qquad v' = -v(\gamma - \delta u)$$

auf $(0, \infty)^2$. Ist das Gleichgewicht in $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ asymptotisch stabil?

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Finde eine Erhaltungsgröße für das System

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= f(u). \end{aligned}$$

Hausübungen

Abgabe: 1.12.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Seien $a, b > 0$. Finde eine Lyapunov-Funktion für das System

$$u' = v - au^3, \qquad v' = -u - bv.$$

Hausaufgabe 2:
Seien $a, b > 0$. Finde $B > 0$ so, dass durch $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2$ eine strikte Lyapunov-Funktion für

$$u' = v, \qquad v' = -au - bv$$

auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird. (Und weise nach, dass es sich um eine strikte LF handelt.)

Hausaufgabe 3:
Zeige: Alle Lösungen von $x'' = x - x^3$ existieren global.

Hausaufgabe 4:
Sei $\tau > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < -|b|$. Für die Gleichung[1]

$$y'(t) = ay(t) + by(t-\tau)$$

wird die durch

$$L[y(t)] = y^2(t) + |b| \int_{t-\tau}^{t} y^2(s)ds$$

definierte Funktion in einem Buch über mathematische Biologie[2] als „Liapunov function" bezeichnet. Zeige, dass diese Bezeichnung gerechtfertigt ist.[3] In welcher Hinsicht weicht sie dennoch von unserer Definition ab?

Hausaufgabe 5:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Eine Menge $M \subset U$ heißt „(positiv) invariant" für das System $u' = f(u)$, falls für alle Anfangswerte $u_0 \in M$ die zugehörigen Lösungen u_{u_0} von

$$u'_{u_0} = f(u_{u_0}), \qquad u(0) = u_0$$

auch $u_{u_0}(t) \in M$ für alle $t \in [0, T_{max})$ erfüllen.
a) Zeige: Vereinigung und Durchschnitt positiv invarianter Mengen sind positiv invariant.
b) Zeige: Falls M abgeschlossen ist, ist M positiv invariant genau dann, wenn für alle $x \in \partial M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $u_x(t) \in M$ für alle $t \in [0, \varepsilon)$.
c) Zeige: Zu jeder Menge $M \subset U$ gibt es eine maximale positiv invariante Teilmenge $I(M)$ von M. Ist $A \subset M$ positiv invariant, so ist $A \subset I(M)$.
d) Sei $V \in C^2(U)$ so, dass $\nabla V(x) \neq 0$ für alle $x \in V^{-1}(\{0\})$. Dann[4] ist $M = V^{-1}((-\infty, 0])$ genau dann positiv invariant, wenn $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle $x \in \partial M = V^{-1}(\{0\})$.
Beweise diesen Satz. Für eine Richtung des Beweises wähle dabei $x_0 \in \partial M$ und zeige, dass es $\bar{t} > 0$ gibt, sodass $u_{x_0}(t) \in M$ für $t \in (0, \bar{t})$. Dazu wähle eine offene Umgebung U_0 von x_0 so, dass $|\nabla V(x)| > \alpha > 0$ für $x \in U_0$ und nutze, dass die Funktion Ψ, die (u_0, λ, t) auf $u(t)$ für die Lösung u von $u(0) = u_0, u' = g(u, \lambda) = f(u) - \lambda \nabla V(u)$ abbildet, stetig ist[5], um zu zeigen, dass $\bar{t}, \bar{\lambda} > 0$ existieren mit $\Psi(t, x_0, \lambda) \in U_0$ für alle $t \in [0, \bar{t}), \lambda \in [0, \bar{\lambda})$.
Sei dann $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ und $t_1 \in [0, \bar{t})$ so, dass $x_1 = \Psi(x_0, t_1, \lambda) \in \partial M$. (Zeige und) nutze, dass $\nabla V(x) \cdot g(x, \lambda) \leq \nabla V(x) \cdot f(x) - \lambda \alpha^2$ in U_0, um auf die Existenz einer offenen Umgebung $U_1 = U_1(t_1, x_0, \lambda) \subset U_0$ von x_1 zu schließen, sodass $\nabla V(x) \cdot g(x, \lambda) \leq 0 \; \forall x \in U_1$ und folgere die Existenz von $\varepsilon_1 \in (0, \bar{t} - t_1)$ mit $\Psi(t, x_1, \lambda) \in U_1 \forall t \in [0, \varepsilon_1]$. Zeige, dass damit $V(\Psi(t, x_1, \lambda)) \leq 0$ für $t \in [0, \varepsilon_1]$ und demnach $\Psi(t, x_1, \lambda) \in M$ für $t \in [0, \varepsilon_1]$. Folgere damit aus $\Psi(0, x_0, \lambda)$ die Ex. von $\varepsilon_0 \in (0, \bar{t}]$ mit $\Psi(t, x_0, \lambda) \in M \forall t \in [0, \varepsilon_0]$ und definiere $t_* = \sup\{\varepsilon \in (0, \bar{t}] : \Psi(t, x_0, \lambda) \in M \forall t \in [0, \varepsilon]\}$. Begründe die Wohldefiniertheit von t_* und, dass $\varepsilon_0 \leq t_* \leq \bar{t}$. Führe die Annahme $t_* < \bar{t}$ mittels der vorhergehenden Überlegungen auf einen Widerspruch. Folgere, dass $\Psi(t, x_0, \lambda) \in M$ für alle $t \in [0, \bar{t}], \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ und nutze eine frühere Teilaufgabe, um den Beweis zu beenden.

Hausaufgabe 6:
Zeige, dass die Menge $M_c = \{(x, y, z) : 28x^2 + 10y^2 + 10(z - 56)^2 \leq c\}$ eine positiv invariante Menge für das Lorenz-System $x' = 10y - 10x, y' = 28x - y - xz, z' = xy - \frac{8}{3}z$ ist, falls $c \geq c_0$ (mit einem geeigneten $c_0 \in \mathbb{R}$; welchem?)[6]. Folgere, dass alle Lösungen des Lorenz-Systems global und beschränkt sind.

Hausaufgabe 7:
Betrachte das System $u'(t) + A(t)u(t) = 0$ für eine differenzierbare Funktion $A \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n \times n}$.
a) Zeige anhand des Gegenbeispiels $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{2t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dass aus der Existenz von

$$\mu > 0 \quad \text{mit} \quad \forall\, t \geq 0 \; \forall\, \lambda \in \sigma(A(t)) : \;\; \mathrm{Re}(\lambda) \geq \mu$$

nicht folgt, dass $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$ ist.
b) Die Matrix $A^T(t) + A(t)$ habe nun für alle $t > 0$ Eigenwerte mit positiven Realteilen. Zeige, dass dann $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$. Betrachte dazu die Lyapunov-Funktion $V(x) = x^T x$ auf $\mathbb{R}^n$.

---

[1] Diese Art von Gleichungen findet man oft unter der Bezeichnung „delay equations", weil der Wert von y nach einer Verzögerung τ in die Gleichung eingeht. Und auf die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (oder auch nur, was man als „Anfangswert" angeben müsste) gehen wir hier nicht ein.
[2] J.D. Murray: Mathematical Biology I: An introduction
[3] Eventuell hilft die Young'sche Ungleichung in der entsprechenden Rechnung.
[4] Tatsächlich würde dafür sogar $V \in C^1(U)$ ausreichen; im Beweis müsste man dann C^1-Funktionen durch C^2-Funktionen annähern (sehr technisch).
[5] Nach Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Satz 13.1, den wir auch für Lemma 2.4.4 genutzt haben.
[6] Tipp: $-z^2 + 56z \leq -\frac{1}{2}(z^2 - 2 \cdot 56z + 56^2) + 1568$.