Michael Winkler
Johannes Lankeit

1.12.2014

8. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
a) Zeige, dass für radiale Funktionen u

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-1} u_r \right)_r$$

ist.
b) Drücke für solche Funktionen auch $|\nabla u(x)|$ durch Ableitungen nach r aus.
c) Berechne (für $x \neq 0$) $\Delta |x|^{2-n}$ und $\Delta \log |x|$.

Präsenzaufgabe 2:
Gegeben seien $R > 0$, $R_0 \in (0, R)$ und $f\colon B_R \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R_0, \\ 0, & |x| \geq R_0. \end{cases}$$

Welche Funktion u liefert die Lösungsformel (1) aus 1.1.1?
Handelt es sich um eine klassische Lösung von (ED)?

Präsenzaufgabe 3:
Sei $f \in L^1(0,1)$. Zeige:

$$x \mapsto \int_0^x f(s)ds, \qquad x \in [0,1],$$

definiert eine stetige Funktion.

Präsenzaufgabe 4:
Sei $R > 0$. Zeige: $f = f(x) \in L^1(B_R)$ gilt genau dann, wenn $r^{n-1} f(r) \in L^1((0,R))$.

Präsenzaufgabe 5:
Sei $R > 0$, $n \geq 1$. Sei $f \in L^1(B_R)$ radial. Zeige, dass die durch

$$u(r) = \int_r^R \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \sigma^{n-1} f(\sigma) d\sigma d\rho$$

definierte Funktion außerhalb des Nullpunkts stetig differenzierbar ist.

Hausübungen

Abgabe: 8.12.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Seien $n \geq 1$, $R > 0$, $f \in C^0(\overline{B_R})$ radial.
Finde eine Formel für radiale Lösungen u des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B_R, \\ u = 42, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Hausaufgabe 2:
Finde Lösungen zu

$$\begin{cases} -\Delta u = e^{|x|}, & x \in B_R, \\ u = 0, & x \in \partial B_R, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^2 - |x|, & x \in B_R, \\ u = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Hausaufgabe 3:
Seien $R > 0, n \geq 1,\ f \in C^0(\overline{B_R})$ radial und nichtnegativ. Zeige: Dann hat die Lösung u von (ED) ein (globales) Maximum in 0.

Hausaufgabe 4:
Zeige, dass differenzierbare radiale Funktionen u stets $u_r(0) = 0$ erfüllen.

Hausaufgabe 5:
Zeige: Für radiales $f \in L^1(B_R)$ definiert

$$u(r) = \int_r^R \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \sigma^{n-1} f(\sigma) d\sigma d\rho$$

eine sehr schwache Lösung von (ED).
Tipp: Für die Integralidentität zeige zunächst $-\int_{B_R} \chi_\varepsilon(|x|) u(x) \varphi(x) dx = \int_{B_R} \chi_\varepsilon(|x|) f(x) \varphi(x) dx$, wobei χ_ε die charakteristische Funktion von B_ε bezeichne.

Hausaufgabe 6:
Seien $a, b \in (0,1)$ sowie $\mu > 0$. Untersuche das Langzeitverhalten des Systems

$$\begin{aligned} u' &= u(1 - u - av) \\ v' &= \mu v(1 - bu - v) \end{aligned}$$

für jede Lösung (u, v) mit Anfangswerten $u(0) > 0, v(0) > 0$.
Tipp: Im Fall $\mu = 1$ definiert $\Phi(u, v) = u - u_* \ln u + v - v_* \ln v$ eine Lyapunov-Funktion, wobei (u_*, v_*) das positive GG des Systems sei.

Hausaufgabe 7:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Funktion $u \in L^2(\Omega)$ erfülle

$$\int_\Omega u\varphi = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Zeige[1], dass dann bereits $u = 0$.
Tipp: Nutze ein $\psi \in C_0^\infty$ mit $\|u - \psi\|_{L^2} < \varepsilon$ und leite die Abschätzung $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u - \psi\|_{L^2(\Omega)}$ her.

[1] Für diese Aussage, das sog. Fundamentallemma der Variationsrechnung, würde auch $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ausreichen.