Michael Winkler
Johannes Lankeit

8.12.2014

9. Übung zur „Höheren Analysis“ im WS 2014/2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $f \in L^1(B_R)$ radial. Zeige: $-\Delta u = f$, $u|_{\partial B_R} = 0$ hat höchstens eine sehr schwache Lösung.

Präsenzaufgabe 2:
Für $\varepsilon \in (0,1)$ sei $f_\varepsilon = c_\varepsilon \chi_{B_\varepsilon}$ ein skalares Vielfaches der charakteristischen Funktion von B_ε, wobei c_ε so gewählt sei, dass $\int_{B_1} f_\varepsilon = 1$. Bestimme die Lösungen u_ε von $-\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon$, $u_\varepsilon|_{\partial B_1} = 0$ sowie punktweise ihren Grenzwert für $\varepsilon \searrow 0$.

Präsenzaufgabe 3:
Die Funktion u sei eine sehr schwache Lösung von $-\Delta u = |x|^\alpha$, $u|_{\partial B_R} = 0$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist u stetig?

Hausübungen

Abgabe: 15.12.2014, 9:16 Uhr

Hausaufgabe 1:
Gegeben sei $f \in L^\infty(B_R)$ und u sei eine sehr schwache Lösung von $-\Delta u = f$, $u|_{\partial B_R} = 0$. Bestimme $\int_{B_R} u$.

Hausaufgabe 2:
Es sei $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ (und $\phi(x) = 0$ für $|x| > 1$) mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$.
a) Gib ein Beispiel für eine solche Funktion an, die zudem radial und monoton bezüglich r ist.
Wir definieren nun für $\varepsilon > 0$ durch

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

weitere Funktionen. Sei außerdem $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
b) Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ dann $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(x) dy = f(x)$ gilt.
c) Wir führen folgende Notation ein:

$$(\phi_\varepsilon \star f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

Zeige, dass $\|f - \phi_\varepsilon \star f\|_{L^p} \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0$.[1]

Hausaufgabe 3:
Mit ϕ_ε wie in HA 2a) sei u_ε die Lösung von $-\Delta u_\varepsilon = \phi_\varepsilon$, $u_\varepsilon|_{\partial B_1} = 0$.
a) Zeige, dass $u_{\varepsilon_1} \geq u_{\varepsilon_2}$, falls $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.
b) Bestimme $u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon(x)$ für jedes $x \in B_1$.
c) Sei $f \in L^p$. Zeige, dass für $\varepsilon \searrow 0$ auch $u_\varepsilon \star f \to u \star f$ in L^p.
d) Bestimme die Grenzfunktion von $-\Delta(u_\varepsilon \star f)$ für $\varepsilon \searrow 0$.
e) Für $f \in C^2(\overline{B_R})$ bestimme $-\Delta(u \star f)$.

Hausaufgabe 4:
Bearbeite (mindestens) eine der Aufgaben, die du auf einem der letzten Blätter übersprungen hast.

[1] Durch Approximation mit glatten Funktionen kann man zeigen, dass, falls $f \in L^p$, $\sup_{|h|<\eta} \|f(\cdot - h) - f\|_{L^p} \to 0$ für $\eta \to 0$.