

1. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:

Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Finde mehrere verschiedene Lösungen für

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Präsenzaufgabe 2:

Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Finde eine Lösung $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

worin

- a) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 0$,
- b) $n = 1$ und $f(x) = 1$,
- c) $n = 1$ und $f(x) = x^2$,
- d) $n = 1$ und $f \in C^0((-1, 1))$,
- e) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 1$,
- f) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = |x|^2$,
- g) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 2 + 3|x|^2$,
- h) $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^0(\bar{\Omega})$ radialsymmetrisch.

(Tipp: Zeige, dass für radialsymmetrische Funktionen u der Laplaceoperator als $\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r = r^{1-n}(r^{n-1}u_r)_r$ geschrieben werden kann.)

Präsenzaufgabe 3:

Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ löse

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

mit einer nichtnegativen Funktion $f \in C^0(\bar{\Omega})$.

Zeige in Spezialfällen – zunächst für $n = 1$, dann für $n \in \mathbb{N}$ und radialsymmetrisches f –, dass dann $u \geq 0$ ist.

Präsenzaufgabe 4:

Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Finde alle Funktionen $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, die

$$\begin{cases} \Delta u = -|x|^4 & (x \in \Omega) \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

erfüllen.

Hausübungen

Abgabe: 16. April 2015, 14:15 Uhr

Wegen §6 (4) der Prüfungsordnung zählen die Hausübungen dieses Blattes noch nicht zu den zum Bestehen des Moduls zu erbringenden Teilleistungen. Für die übrigen Hausübungen gilt: Alle Übungszettel (bis auf zwei) sind abzugeben, insgesamt müssen in den Hausübungen mindestens 20 Punkte erreicht werden.

Hausaufgabe 1:

Es bezeichne $\Phi: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ die üblichen Polarkoordinaten auf dem \mathbb{R}^2 . Für $x = \Phi(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bezeichnen wir

$$\begin{pmatrix} r(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} := \Phi^{-1}(x).$$

Zeige:

i) Die Funktion

$$g: \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n! \varphi(x))$$

ist stetig.

ii) Die Funktion

$$u: \overline{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r(x))^{n!}}{n^2} \sin(n! \varphi(x)) & \text{für } x \in \overline{B}_1(0) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig.

iii) In $B_1(0)$ gilt $\Delta u = 0$.

iv) $u|_{\partial B_1(0)} = g$.

v) $\|\nabla u\|_{L^2(B_1(0))}^2 = \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 d\lambda = \infty$.

In welchen der folgenden Funktionenräume liegt u ?

$$C^k(\overline{B}_1(0)), C^k(B_1(0)), k \in \{0, 1, 2, \infty\}, L^p(B_1(0)), p \in [1, \infty]$$

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir definieren die Kelvin-Transformation $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega$, $\Phi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.

Zeige: Φ ist ein globaler C^∞ -Diffeomorphismus.

Zeige: Falls $\Delta u = 0$, so erfüllt auch $v = r^{2-n} \cdot (u \circ \Phi)$ diese Gleichung.

Hausaufgabe 3:

Finde alle stetig differenzierbaren Funktionen $u: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$xu_x(x, y) = yu_y(x, y), \quad (x, y) \in (0, \infty)^2,$$

und $u(x, x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften?

Tipp: Die Richtungsableitungen von u in welche Richtung sind im Punkt (x, y) gleich null? Entlang welcher Kurven ist also u konstant?

Hausaufgabe 4:

Melde dich in Paul auch für die Übung zur Vorlesung an (sofern du vorhast, sie jemals zu besuchen).