Michael Winkler
Johannes Lankeit

2. Juli 2015

10. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen" im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es seien $n \geq 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ und $a \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Das Funktional

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega au^2}{\int_\Omega u^2}, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

besitzt (einer früheren Aufgabe zufolge) ein Minimum μ_1.

a) Beweise, dass jeder zugehörige „Minimierer" von J, also jede Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $J(u) = \mu_1$, zu $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ gehört.

b) Identifiziere eine partielle Differentialgleichung, die jeder Minimierer von J erfüllt.

c) Formuliere eine hinreichende Bedingung an a, die die Existenz eines Minimierers u von J mit $u > 0$ in Ω sicherstellt.

Präsenzaufgabe 2:
Seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Es bezeichne $\lambda_1 := \min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} J(u)$, $J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$, den ersten Eigenwert von $-\Delta$ in Ω und $\Theta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ eine zugehörige nichtnegative Eigenfunktion mit $\int_\Omega \Theta^2 = 1$. Zeige:

a) Ist u eine nichtnegative schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1, so ist u auch eine klassische Eigenfunktion, und es gilt $u > 0$ in Ω.

b) Ist u eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 mit $\int_\Omega u^2 = 1$ und $u \not\equiv \Theta$, so gilt $J(\Theta - u) = \lambda_1$.

c) Ist u wie in b), so ist $(\Theta - u)_+$ eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1.

d) Ist u eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1, so gibt es $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $u = \beta\Theta$. In diesem Sinne ist also λ_1 ein „einfacher Eigenwert" von $-\Delta$.

Hausübungen

Abgabe: 9. Juli 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand, und es sei $p > 1$ so, dass

$$p < p_S := \begin{cases} \infty, & \text{falls } n \leq 2, \\ \frac{n+2}{n-2}, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

a) Begründe, dass

$$S := \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega |u|^{p+1} = 1 \right\}$$

eine wohldefinierte, abgeschlossene Teilmenge von $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist.

b) Zeige, dass es zu $J : S \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2, \qquad u \in S,$$

ein nichtnegatives $v \in S$ gibt mit

$$J(v) \leq J(u) \qquad \text{für alle } u \in S.$$

c) Sei v wie in b). Zeige, dass dann zu jedem $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, so dass

$$h(\varepsilon) := J\left(\frac{v + \varepsilon\varphi}{\|v + \varepsilon\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \right), \qquad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

wohldefiniert und differenzierbar ist mit $h'(0) = 0$.

d) Schließe, dass es mit v wie in b) ein $a > 0$ gibt mit

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi = a \int_\Omega v^p \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

e) Zeige, dass das *Dirichlet-Problem für die Lane-Emden-Gleichung*, also das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

mindestens eine klassische Lösung u besitzt, die positiv in Ω ist.

[Tipp: Für geeignetes $b > 0$ ist $u := bv$ gemäß d) eine schwache Lösung, die wegen der Stetigkeit von $W_0^{1,2}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega v^p \cdot \varphi$, letzteres aufgrund von $p < p_S$, stetig ist. Verwende bekannte Regularitätsargumente und ein Maximumprinzip, um $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ für alle $\alpha \in (0, 1)$ und $u > 0$ in Ω zu zeigen.]