Michael Winkler
Johannes Lankeit

9. Juli 2015

11. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen" im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

a) Zeige, dass für jedes $\gamma > 0$ das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = e^{-\gamma u^2} & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

genau eine klassische Lösung $u = u_\gamma$ besitzt, und dass diese positiv in Ω ist.

b) Bestimme

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} u_\gamma(x) \quad \text{sowie} \quad \lim_{\gamma \searrow 0} u_\gamma(x) \qquad \text{für alle } x \in \Omega.$$

[Tipp: Zeige, dass es $\alpha \in (0,1)$ und $C > 0$ mit $\|u_\gamma\|_{C^{2+\alpha}(\bar\Omega)} \leq C$ für alle $\gamma > 0$ gibt, und verwende den Satz von Arzelà-Ascoli.]

Präsenzaufgabe 2:
Es seien $T \in (0,\infty)$ und $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R})$ „lokal Lipschitz-stetig bzgl. u", d.h., zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ gebe es $L(K) > 0$ mit

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leq L|u-v| \qquad \forall (x,t,u),(x,t,v) \in \overline{\Omega} \times [0,T] \times K.$$

Sind dann $\overline{u}$ bzw. $\underline{u}$ eine „Oberlösung" bzw. eine „Unterlösung" der Gleichung $u_t = \Delta u + f(x,t,u)$ in $\Omega \times (0,T)$, sind also $\overline{u}, \underline{u} \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ mit

$$\overline{u}_t \geq \Delta\overline{u} + f(x,t,\overline{u}) \quad \text{und} \quad \underline{u} \leq \Delta\underline{u} + f(x,t,\underline{u}) \qquad \text{in } \Omega \times (0,T),$$

so gilt folgende Implikation: Aus

$$\overline{u} \geq \underline{u} \qquad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T)$$

und

$$\overline{u}\big|_{t=0} \geq \underline{u}\big|_{t=0}$$

folgt

$$\overline{u} \geq \underline{u} \qquad \text{in } \Omega \times (0,T).$$

Beweise diesen Vergleichssatz.
Setze dazu mit $\varepsilon, \alpha > 0$

$$w(x,t) := \overline{u}(x,t) - \underline{u}(x,t) + \varepsilon e^{\alpha t}, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T),$$

und

$$S := \{\bar{t} \in (0,T); w(x,t) > 0 \;\; \forall\, (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\bar{t})\}$$

und begründe die Wohldefiniertheit von $t_0 = \sup S \in (0,T]$.
Nimm an, dass $t_0 < T$ und weise unter dieser Voraussetzung die Existenz von $x_0 \in \Omega$ nach, sodass

$$w(x_0,t_0) = 0.$$

Nutze Informationen über die Vorzeichen von $w_t(x_0,t_0)$ und $\Delta w(x_0,t_0)$, um – geeignete Wahl von α vorausgesetzt – einen Widerspruch herzuleiten.
Folgere schließlich den Vergleichssatz.

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet, $T > 0$ und ist $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. u, so hat

$$u_t = \Delta u + f(x,t,u) \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \;\; u\big|_{t=0} = u_0 \tag{1}$$

höchstens eine klassische Lösung u.

Präsenzaufgabe 4:
Beweise: Es seien Ω, T wie zuvor. Es erfülle $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R})$ eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. u und es sei

$$f(x,t,0) \geq 0 \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Sind dann $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ nichtnegativ und u eine klassische Lösung von (1), so gilt $u \geq 0$ in $\Omega \times (0,T)$.

Hausübungen

Abgabe: 16. Juli 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $a > 0$. Zu $\lambda > \lambda_1$ betrachte die Lösung u_λ von

$$-\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda - a u_\lambda^2, \qquad u_\lambda\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Bestimme $\lim_{\lambda \searrow \lambda_1} u_\lambda$.

Hausaufgabe 2:
Es seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachtet seien die Randwerprobleme

$$\begin{cases} -\Delta u = \cos(ku) & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{$\star$}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ genau eine klassische Lösung u_k von ($\star$) gibt, die

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\pi}{2k}$$

erfüllt, und dass für diese Lösung sogar $0 < u_k(x) \leq \frac{\pi}{2k}$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

b) Zeige, dass $u_k \to 0$ in $C^1(\bar{\Omega})$ für $k \to \infty$ gilt, dass aber $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht in $C^2(\bar{\Omega})$ konvergent ist.

Hausaufgabe 3:
Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, mit glattem Rand. Zeige, dass es $\lambda > \lambda_1$ und $u_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ gibt derart, dass für die Lösung u von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda u & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

gilt

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty.$$

[Tipp: Suche eine geeignete explizite Lösung mithilfe eines Produktansatzes.]

Hausaufgabe 4:
Zeige:

$$u_t = u_{xx} + \sqrt{1+u}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; t > 0, \qquad u(x,0) = \sin x, \; x \in (0,\pi),$$

hat eine glatte klassische Lösung in $(0,\pi) \times (0, T_{max})$ für ein (maximal gewähltes) $T_{max} \in (0,\infty]$.
Bestimme T_{max}.
Zeige, dass $u(\frac{\pi}{4}, 42) = u(\frac{3\pi}{4}, 42)$.