Michael Winkler
Johannes Lankeit

16. Juli 2015

12. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen" im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Zeige, dass Lösungen von

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + |x|^2, \quad x \in B_1(0),\, t>0, \qquad u\big|_{\partial B_1(0)} = 0, \quad t>0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

global existieren, und untersuche ihr Langzeitverhalten.

Präsenzaufgabe 2:
Finde zwei verschiedene Lösungen für

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, t>0, \quad u(x,0)=1, \quad x \in \Omega.$$

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $f \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ und es gebe $\lambda > 0$ und $C > 0$ derart, dass

$$f(x,t,u) \begin{cases} \le C + \lambda u & \forall (x,t,u) \in \Omega \times (0,\infty) \times [0,\infty), \\ \ge -C + \lambda u & \forall (x,t,u) \in \Omega \times (0,\infty) \times (-\infty, 0) \end{cases}$$

gilt. Zeige: Dann ist für jedes $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ die zugehörige Lösung u von

$$u_t = \Delta u + f(x,t,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0$$

global und erfüllt

$$u^-(x,t) \le u(x,t) \le u^+(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

worin $u^\pm$ die Lösungen von

$$u_t^\pm = \Delta u^\pm + \lambda u^\pm \pm C, \qquad u^\pm\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u^\pm\big|_{f-0} = (\pm u_0)_+$$

bezeichnen.
Ist insbesondere $\lambda < \lambda_1$, so ist die Lösung beschränkt.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ eine beschränkte Funktion. Betrachte

$$u_t = \Delta u + f(x,t,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0$$

und zeige, dass dieses Problem in $L^2(\Omega)$ eine **kompakte absorbierende Menge** besitzt, d.h. es eine Menge $M \subset L^2(\Omega)$ gibt, sodass für jedes $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ eine globale Lösung u mit $u(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ für alle $t>0$ existiert und zu jeder derartigen Lösung ein $t_0 > 0$ existiert, sodass $u(\cdot,t) \in M$ für alle $t \ge t_0$ gilt.
Multipliziere dazu zunächst die Gleichung mit $-\Delta u$.

Hausübungen

Abgabe: Ad Kalendas Graecas, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Bereite dich hinreichend gut auf die Klausur vor. (30.7.2015, 10:00 Uhr, E1.143)