Michael Winkler
Johannes Lankeit

16. April 2015

2. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Für welche Funktionen f, g löst $u(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$ das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = g$$

für $\Omega = (0,1) \times (0,1)$?

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde alle radialsymmetrischen Lösungen zu $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Präsenzaufgabe 3:
Verfolge einen Produktansatz, um möglichst viele harmonische Funktionen $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ zu konstruieren.

Präsenzaufgabe 4:
Finde mit Hilfe eines Produktansatzes Lösungen zu $u_t = -u_x,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 5:
Gib polynomiale Lösungen bis zu dritten Grades von $u_{tt} = u_{xx}$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, an.

Präsenzaufgabe 6:
Es seien $R > 0$ und $\rho \in (0,R)$ sowie $\Omega := B_R(0) \setminus \bar{B}_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
Bestimme eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

worin

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| = R, \\ 1, & \text{falls } |x| = \rho, \end{cases}$$

sei.

Hausübungen

Abgabe: 23. April 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es seien $A > 0$ und $B > 0$. Finde mithilfe eines Produktansatzes eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega := (0,A) \times (0,B), \\ u(x,0) = u(x,B) = 0 & \forall x \in [0,A], \\ u(0,y) = 0, \quad u(A,y) = \sin\frac{\pi y}{B} & \forall y \in [0,B]. \end{cases}$$

Hausaufgabe 2:

a) Formuliere und beweise ein Analogon zu Proposition 1.2 für den Fall $n = 2$.

b) Es gelte $n \geq 3$, und $f \in C^0([0, R])$ sei nichtnegativ mit $f \not\equiv 0$. Es sei u diejenige durch Proposition 1.2 gegebene Lösung der entsprechenden Poisson-Gleichung in $B_R(0)$, die $u|_{\partial B_R(0)} = 0$ erfüllt. Zeige, dass dann bereits $u > 0$ in ganz $B_R(0)$ gilt.

Hausaufgabe 3:
Finde durch einen Separationsansatz nichttriviale Lösungen der Gleichungen

a) $u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R};$

b) $u_t = -u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R};$

c) $u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R};$

d) $u_t = -uu_x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$

Hausaufgabe 4:
Es seien $\theta \in (0, 2\pi)$ und Ω_θ der unbeschränkte Sektor im $\mathbb{R}^2$ mit Öffnungswinkel θ gegeben durch

$$\Omega_\theta := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \text{ mit } r > 0 \text{ und } \varphi \in (0, \theta) \right\}.$$

a) Konstruiere harmonische Funktionen u in Ω_θ, die $u = 0$ auf $\partial\Omega_\theta \setminus \{0\}$ erfüllen, mithilfe des Produktansatzes

$$u(r, \varphi) = F(r) \cdot G(\varphi), \qquad r > 0, \varphi \in (0, \theta).$$

[Tipp: Die resultierende Differentialgleichung für F ist vom Euler-Typ $r^2F'' + arF' + bF = 0$ mit bestimmten $a, b \in \mathbb{R}$ und besitzt daher Lösungen der Form $F(r) = r^\alpha$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{C}$.]

b) Stelle die in a) gefundenen Lösungen in den Fällen $\theta = \pi$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ explizit in Abhängigkeit von x und y dar, und diskutiere das Verhalten nahe dem Ursprung.

c) Zeige, dass für jedes $\theta \in (0, 2\pi)$ die Aufgabe

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega_\theta, \\ u|_{\partial\Omega_\theta} = 0, & \end{cases}$$

nicht eindeutig lösbar ist, also mindestens zwei klassische Lösungen in $C^0(\bar{\Omega}_\theta) \cap C^2(\Omega_\theta)$ zulässt.

Hausaufgabe 5:
Es seien $R > 0$ und $\rho \in (0, R)$ sowie $\Omega := B_R(0) \setminus \bar{B}_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Bestimme eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. & \end{cases}$$