Michael Winkler
Johannes Lankeit

23. April 2015

3. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ habe die zweimal stetig differenzierbare Funktion f eine positive zweite Ableitung. Warum kann sie im Innern von I kein Maximum annehmen?

Präsenzaufgabe 2:
Die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ löse in dem beschränkten Gebiet Ω

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{in } \Omega \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit einer stetigen nichtnegativen Funktion g. Diese Funktion sei an wenigstens einer Stelle $x_0 \in \partial\Omega$ positiv. Zeige: $u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$.

Präsenzaufgabe 3:
Im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine harmonische Funktion. Zeige, dass u keine isolierte Nullstelle $x_0 \in \Omega$ haben kann.

Präsenzaufgabe 4:
Wende die Greensche Integralformel (Lemma 3.2) auf u und Δu an, um zu zeigen, dass jede Lösung $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 = \partial_\nu u, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

in einem glatt berandeten beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bereits $u = 0$ erfüllt.

Hausübungen

Abgabe: 30. April 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine in Ω harmonische Funktion mit $\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u$. Zeige: Es gilt $\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u$ für alle $x \in \Omega$.

Hausaufgabe 2:
Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ eine subharmonische Funktion, d.h., es gelte $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Zeige, dass u in Ω nirgends ein (striktes) lokales Maximum annimmt.

Hausaufgabe 3:
Zeige: Zu jedem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt es $C > 0$, sodass jede Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

die Abschätzung

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq C(\max_{\partial\Omega} g + \max_{\Omega} f)$$

erfüllt.
Tipp: $-\Delta(u + \frac{|x|^2}{2n}\lambda) \leq 0$ für $\lambda := \max|f|$.

Hausaufgabe 4:
Gibt es eine nichtnegative Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, die $-\Delta u = 1$ in $\mathbb{R}^n$ erfüllt?
[Tipp: Für jede solche – unterstelltermaßen existente – Lösung u und jedes $R > 0$ gilt aufgrund des Vergleichssatzes $u \geq u_R$ in $B_R(0)$, worin u_R die explizit berechenbare Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u_R = 1 & \text{in } B_R(0), \\ u_R|_{\partial B_R(0)} = 0, \end{cases}$$

bezeichnet.]

Hausaufgabe 5:
Beweise den *Satz von Liouville* für harmonische Funktionen: Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte harmonische Funktion, so ist u konstant.
[Tipp: Zeige zunächst, dass man $\inf u = 0$ und $\sup u = M \geq 0$ annehmen darf. Wäre dann $M > 0$, so gäbe es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_1) \geq \frac{3}{4}M$ und $u(x_2) \leq \frac{1}{4}M$. Verwende die Mittelwerteigenschaften von u in $B_R(x_1)$ und $B_{R+d}(x_2)$ für $R > 0$ und $d := |x_1 - x_2|$, und leite für große R einen Widerspruch her.]