Michael Winkler
Johannes Lankeit

30. April 2015

4. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Für $n \geq 2$ sei $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definiert durch

$$\Gamma(z) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n}|z|^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3, \\ -\frac{1}{2\pi}\ln|z|, & \text{falls } n = 2. \end{cases}$$

Bestätige die Identitäten

$$\begin{aligned} \partial_i\Gamma(z) &= -\frac{1}{\omega_n} \cdot |z|^{-n} z_i \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad \text{und} \\ \partial_{ij}\Gamma(z) &= -\frac{1}{\omega_n} \cdot |z|^{-n-2} \cdot \Big\{|z|^2\delta_{ij} - nz_iz_j\Big\} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

und $\Delta\Gamma = 0$.

Präsenzaufgabe 2:
Für $x \neq y$ im $\mathbb{R}^n$ definiere

$$k(x,y) = \frac{1-|x|^2}{\omega_n|x-y|^n}$$

und setze

$$u(x) := \int_{|y|=1} k(x,y)dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_1.$$

Zeige, dass $\Delta_x k(x,y) = 0$ für alle y mit $|y| = 1$, dass u in $\mathbb{R}^n \setminus \partial B_1$ harmonisch ist und dass $u = 1$ auf B_1.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ eine nichtnegative harmonische Funktion und $\bar{B}_R \subset \Omega$. Zeige anhand der Poissonschen Lösungsformel, dass dann für $x \in B_R$

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

gilt.
Folgere, dass jede auf $\mathbb{R}^n$ harmonische, nach unten beschränkte Funktion konstant ist.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Zeige: $u \in C^\infty(\Omega)$.

Präsenzaufgabe 5:
Sei $B := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \geq 2$ und $R > 0$. Ferner erfülle $0 \not\equiv g \in C^0(\partial B)$ die Bedingung

$$\int_{\partial B} g(y)y ds_y = 0 \ (\in \mathbb{R}^n).$$

Zeige, dass dann die klassische Lösung u von

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B, \\ u|_{\partial B} = g, \end{cases}$$

einen Sattelpunkt in $x = 0$ hat.

Hausübungen

Abgabe: 7. Mai 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise Satz 5.1 der Vorlesung: Es sei $u \in C^0(\bar{\Omega})$ so, dass für jede Kugel $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) ds_y$$

gilt. Dann ist $u \in C^2(\Omega)$ und erfüllt $-\Delta u = 0$ in Ω.

[Tipp: Sei $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$. Nach 4.3 gibt es $h \in C^0(\bar{B}) \cap C^2(B)$ mit $-\Delta h = 0$ in B und $h|_{\partial B} = u|_{\partial B}$. Die Funktion $v := u - h$ hat dann eine entsprechende Mittelwerteigenschaft in jeder Kugel $B' \subset B$. Die Argumente von 2.1-2.6 zeigen nun, dass deswegen $v \equiv 0$ in B sein muss.]

Hausaufgabe 2:

Es bezeichne B die Kugel um den Ursprung im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit Radius $R > 0$. Zeige, dass für die Green'sche Funktion G erster Art in B die Identität

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) = -\frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} |x - y|^{-n} \qquad \text{für alle } x \in B \text{ und jedes } y \in \partial B$$

gilt.

Hausaufgabe 3:

Es seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, auf dem der Satz von Gauß gilt. Ferner seien $f \in C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ so, dass

$$\int_\Omega f(x) dx > 0,$$

und $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung der Gleichung

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega.$$

Zeige, dass es dann ein $x_0 \in \partial\Omega$ mit

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} < 0$$

gibt.

Hausaufgabe 4:

Es sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(B \setminus \{0\}) \cap C^0(\overline{B} \setminus \{0\})$ harmonisch mit $\lim_{z \to 0} \frac{u(z)}{\log |z|} = 0$. Zeige, dass es eine harmonische Fortsetzung $v \in C^2(B)$ gibt.

Wähle als v die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{in } B \\ v = u & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und setze $w = v - u$ sowie $M := \max_{\partial\Omega} u$ und $M(r) := \max_{|x|=r} w(x)$. Zeige dann

a) $|v| \leq M$ in B.

b) Falls $|x| = r$ oder $|x| = 1$, so ist $-M(r)\frac{\log|x|}{\log r} \leq w(x) \leq M(r)\frac{\log|x|}{\log r}$.

c) Für $x \in B \setminus B_r(0)$ ist $|w(x)| \leq M(r)\frac{\log|x|}{\log r}$.

d) Für $x \in B \setminus B_r(0)$ ist $|w(x)| \leq M\frac{\log|x|}{\log r} + \frac{\log|x|}{\log r} \max_{|y|=r} u(y)$.

e) $w \equiv 0$ in $B \setminus \{0\}$.