Michael Winkler
Johannes Lankeit

7. Mai 2015

5. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen" im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Gegeben seien das Gebiet $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ sowie $u(x) = x^2$.
Bestimme zu $M_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M_2 = (-1, 0)$ und $M_3 = \Omega$ die harmonischen Liftungen $H_{B_i}(u)$.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige, dass jede C^2-subharmonische Funktion (vgl. Einleitung zu Kapitel 2) auch im Sinne der Definition 5.3 subharmonisch ist.

Präsenzaufgabe 3:
Sind u, v subharmonisch und $\lambda > 0$, so sind auch $u + v$ sowie λu subharmonisch.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch (im Sinne von Def. 5.3).
Zeige, dass u in $x_0 \in \Omega$ allenfalls dann ein Maximum annimmt, wenn u konstant ist.

Präsenzaufgabe 5:
Zeige: Jede konvexe Funktion ist subharmonisch, aber nicht umgekehrt.

Hausübungen

Abgabe: 21. Mai 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Beweise Lemma 5.7 der Vorlesung:
Ist Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, und sind $u, v \in C^0(\bar{\Omega})$ subharmonisch in Ω, so ist auch $\max\{u, v\}$ subharmonisch.

Hausaufgabe 2:
Es sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ subharmonisch mit $\limsup_{|x|\to\infty} u(x) \leq 0$. Zeige, dass $u \leq 0$ in $\mathbb{R}^n$.
(Betrachte eine Folge $(x_m)_m$ mit $u(x_m) \to \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$.)

Hausaufgabe 3:
Es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ harmonisch (d.h. u und $-u$ subharmonisch im Sinne von Def. 5.3).
Zeige: $\|\nabla u\|^2$ ist subharmonisch.

Hausaufgabe 4:
Ist u subharmonisch und $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, nichtfallend und konvex, so ist $\Phi \circ u$ subharmonisch.

Hausaufgabe 5:
Die Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ sei sub- und superharmonisch.
Zeige: Dann gilt tatsächlich schon $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = 0$.

Hausaufgabe 6:

Es sei $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1(0)$ und $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige:

$$u(x) := \frac{|x|^2 - 1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS_y$$

erfüllt $\Delta u = 0$ in Ω und $\lim_{|x|>1, x\to x_0} u(x) = g(x_0)$ für $x_0 \in \partial\Omega$.
Tipp: Zeige zunächst, dass für $|y| = 1$ die Gleichheit $(|x||y - \frac{x}{|x|^2}|)^2 = |x-y|^2$ erfüllt ist, und nutze Übungen früherer Übungsblätter, um den Rechenaufwand gering zu halten.

Hausaufgabe 7:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeige: Dann gibt es zu jeder zusammenhängenden kompakten Teilmenge dieses Gebiets $K \subset \Omega$ eine Konstante C (abhängig von der Raumdimension, Ω und dem Abstand von K zu $\partial\Omega$), sodass für alle nichtnegativen harmonischen Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ die Abschätzung

$$\max_K u \leq C \min_K u$$

erfüllt ist.

Hausaufgabe 8:

Gegeben seien das Gebiet $\Omega = B_R \subset \mathbb{R}^n$ und eine beschränkte Folge von Funktionen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f_j \subset [-1, 1]$. Weiter seien radialsymmetrische Lösungen $u_j \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} -\Delta u_j = f_j(u_j) & \text{in } \Omega \\ u_j\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeige, dass es $C > 0$ gibt, sodass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\int_{B_R} |\nabla u_j|^2 \leq C$ erfüllt ist. (Tipp: Multipliziere die Gleichung mit u_j und integriere.)

b) Weise die Existenz einer radialen Funktion $w \in C^0(\bar{B}_R \setminus \{0\})$ mit $w\big|_{\partial\Omega} = 0$ und einer in $C^0_{loc}(\bar{B}_R \setminus \{0\})$ gegen diese konvergenten Teilfolge $(u_{j_k})_k$ nach. Folgende Schritte können dabei nützlich sein:

   i) Zeige, dass für $R_l \in (0, R)$ dann für alle $r \in [R_l, R)$, für alle $\rho \in (r, R]$, $j \in \mathbb{N}$ $x, y \in B_R \setminus B_{R_l}$ mit $|x| = \rho$ und $|y| = r$ die Ungleichung

   $$|u_j(x) - u_j(y)| \leq \sqrt{\frac{C(r-\rho)}{R_l^{n-1}}}$$

   gilt. (Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Nutze, dass – in naheliegender radialer Schreibweise – $\int_0^R \sigma^{n-1} |u_{jr}(\sigma)|^2 d\sigma < C$.)

   ii) Zeige, dass $(u_j)_j$ für jedes $R_l \in (0, R)$ auf $B_R \setminus B_{R_l}$ beschränkt ist.

   iii) Weise für $R_l \in (0, R)$ die Existenz einer Teilfolge $(u_{j_k})_k$ und einer Funktion $w_l \in C^0(B_R \setminus B_{R_l})$ nach, sodass $u_{j_k} \to w$ gleichmäßig in $B_R \setminus B_{R_l}$.

   iv) Folgere schließlich – in Anlehnung an Argumente aus einen Beweis der letzten Vorlesung – die Existenz einer in C^0_{loc} konvergenten Teilfolge $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$.